LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS
519.53
~~519.8~~
G31a

Math.

Die

Ausgleichungs-Rechnungen

der

practischen Geometrie,

oder die

Methode der kleinsten Quadrate

mit ihren

Anwendungen für geodätische Aufgaben,

von

Christian Ludwig Gerling.

Hamburg und Gotha,
bei Friedrich und Andreas Perthes.
1843.

Die

Ausgleichungs-Rechnungen

der

praktischen Geometrie,

oder die

Methode der kleinsten Quadrate

mit ihren

Anwendungen für geodätische Aufgaben,

von

Christian Ludwig Gerling.

Hamburg und Gotha,
bei Friedrich und Andreas Perthes.
1843.

519.53
G31a
Mathematics
MATHEMATICS LIBRARY

Sr. Hochwohlgeboren

dem

Herrn Hofrath und Ritter

G A U S S

zu

Göttingen.

30277

Sr. Hoch wohlgeboren

dem

Herrn Hofrath und Ritter

GAUSS

zu

Göttingen.

Wer, wie Sie verehrter Mann! nach allen Seiten hin keimfähigen Saamen ausstreut, der wird doch wohl mitunter gern einmal nachsehen, was daraus geworden.

Ueber dreifsig Jahre sind es nun, dafs von Ihrer Aussaat auch etwas auf meinen Acker fiel.

Seitdem habe ich, immer von Zeit zu Zeit durch Ihren freundlichen Rath unterstützt, die Schöfslinge treu gepflegt, die mir daraus erwuchsen.

Jetzt hat nun einer von ihnen Früchte getragen, die ich für reif genug halte, um meinen Gästen davon mitzutheilen.

So erlauben Sie denn, dafs ich die Erstlinge Ihnen widme.

G.

Vorrede.

Die Geschichte der Wissenschaft lehrt, dafs jede tief eingreifende neue Methode geraume Zeit hindurch gleichsam esoterische Lehre einer geringen Anzahl von Gelehrten bleibt und erst sehr allmählig in den Gebrauch derjenigen Personen übergeht, die, ohne an dergleichen Erfindungen selbst Antheil zu nehmen, in ihren Berufs-Arbeiten die nützlichste Anwendung davon machen können.

So ist es denn nun auch seit dem Anfange dieses Jahrhunderts mit der Methode der kleinsten Quadrate gegangen. Sie wurde zuerst auf einige wichtige astronomische Aufgaben angewandt, fand in der Astronomie nach und nach immer mehr Benutzung und ist dort jetzt so einheimisch, dafs keine einigermaafsen erhebliche Arbeit mehr ohne sie ausgeführt werden kann.

Aber eben, weil sie sich durchaus nicht auf einen solchen besonderen Zweig des mathematisch-physicalischen Wissens beschränkt, sondern überall Anwendung findet, wo es darauf ankommt, durch Beobachtungen oder Versuche Zahlen-Angaben festzustellen, oder aus ihnen zuverlässige Folgerungen zu ziehen; und weil sie zugleich das Mittel gewährt, die jedesmalige Genauigkeit einer solchen Arbeit zu beurtheilen, war vom Anfange schon eine weitere Ausbreitung derselben eben so sehr zu wünschen als zu erwarten. — Bis

jetzt hat z. B. schon die Physik in verschiedenen Fällen wesentliche Vortheile daraus gewonnen und eben so wird es unfehlbar im Laufe der Zeit auch in anderen Theilen der Natur-Wissenschaft gehen, in welchen dermalen noch von diesem neuen und wirksamen Hülfsmittel kein Gebrauch gemacht worden ist.

Unverkennbar ist auch der Nutzen, welchen die practische Geometrie daraus schöpfte, dafs man die Methode der kleinsten Quadrate in ihr zu gebrauchen anfing. Dies geschah freilich bis jetzt nur in demjenigen Theile, den man gewöhnlich mit dem Namen der höheren Geodäsie zu bezeichnen pflegt, und zwar vorzüglich deshalb, weil man hier von jeher gewohnt war, das Verfahren nach dem Muster und der Anweisung der Astronomen zu vervollkommnen. Darauf beschränkt sich aber die Anwendbarkeit derselben keineswegs. Wenn man nämlich auch die Unterscheidung zwischen sogenannter höherer und niederer Geodäsie noch beizubehalten für angemessen finden sollte, so würde man doch einräumen müssen, dafs die letztere eben so viel Anspruch hat als die erstere, ihre Arbeiten von einer Methode geleitet zu sehen, die darauf ausgeht, allgemein für alle Messungen, welcher Art und Beschaffenheit sie auch seyen, die Genauigkeit nicht nur zu vermehren, sondern auch richtig zu würdigen.

Der allgemeineren Verbreitung der Methode der kleinsten Quadrate unter den Practikern, die gerade in ihren täglichen Geschäften davon vielfältigen Nutzen ziehen könnten, standen aber bis jetzt grofse Schwierigkeiten im Wege. Wer seine Beobachtungen darnach ausgleichen wollte, mufste sich zuerst auf den Standpunkt der Wissenschaft zu erheben suchen, von wo aus er den Plan zu seinem Geschäfte machen zu können glaubte, dann sich bis zu seiner einzelnen Anwendung selbst durcharbeiten, und wenn er dabei etwa in einen Irrthum gerieth, immer wieder auf den ersten Standpunkt zurückkehren, bis er den richtigen

Weg zu seinem Ziele gefunden. Das ist aber kein Geschäft für den Practiker, der durch Beruf und Bedürfnifs darauf angewiesen ist, auf gebahnten Wegen rasch fortzuschreiten. Er verlangt, dafs ihm ein Anderer erst die Wege bereite, auf welchen er wandeln soll, und auch wohl noch einen Wegweiser hinsetze, wo er leicht in einen Irrweg gerathen könnte. — Ohne Bild zu reden, der Practiker hat gewöhnlich nicht Zeit, die Methode der kleinsten Quadrate aus Quellen-Schriften zu studiren, die grofsentheils in lateinischer Sprache, und zwar zunächst für Gelehrte vom Fach geschrieben, nicht einmal abgesondert im Buchladen zu haben sind; dann sich die Anwendung auf die ihm gerade vorliegende Aufgabe selbst zu entwickeln; die practische Rechnung nach den selbstentwickelten Formeln durchzuführen; und, wenn etwa die Probe-Rechnung einen vorgefallenen Irrthum nachweist, auszumitteln, ob derselbe in seiner Formel oder in seiner Rechnung liegt. Er bedarf vielmehr, ehe er sich dazu entschliefsen kann, die gewünschten Vortheile zu erstreben, eines Lehrbuches, welches ihm die Grundsätze, worauf es ankommt, in möglichst populärer Weise, d. h. mit alleiniger Voraussetzung der ihm ohnehin geläufigen Vorkenntnisse darlege, die vorzüglichsten Anwendungen, vollständig entwickelt und durch Beispiele belegt, mittheile, und ihm Gelegenheit gebe, durch blofses Nachschlagen für alle vorkommenden Fälle wenigstens den Weg zu finden.

Dafs dieses Bedürfnifs wirklich besteht, davon halte ich mich durchaus überzeugt. Denn nicht nur habe ich seit 20 Jahren immer einzelne Anwendungen der Ausgleichungs-Rechnung meinen Zuhörern in der practischen Geometrie auf ihr besonderes Verlangen mitzutheilen Veranlassung gefunden, ja seit den letzten 4 oder 5 Jahren ihnen auch von Zeit zu Zeit einen etwas ausführlicheren Vortrag darüber zu halten; sondern ich sehe auch aus

den mitunter von Practikern an mich gerichteten Fragen, dafs sie recht wohl wissen, wie die sogenannte höhere Geodäsie durch diese neue Methode reformirt worden ist, und also nur gar zu gern auch in ihren gewöhnlichen Geschäften, wenigstens bei Gewissensfällen, Gebrauch davon machten, wenn sie es nur anzufangen wüfsten. Solche Gewissensfälle aber, wo der Practiker sich mit getreuer Befolgung seiner Instruction allein noch nicht beruhigt, sondern darnach verlangt, die Hülfsmittel zu kennen, welche die Wissenschaft zur Erforschung der Wahrheit noch überdies anbietet, sind doch so ganz selten nicht, und pflegen eben dem sorgfältigsten und zuverlässigsten Arbeiter am ehesten Sorge zu machen.

Wenn ich es nun unternahm diesem Bedürfnisse entgegen zu kommen, so verhehlte ich mir dabei nicht die grofsen Schwierigkeiten, die solches mit sich führt; ja ich halte die Aufgabe: ein Lehrbuch über einen neuen Zweig der Wissenschaft zu schreiben, der dadurch dem Bedürfnisse der gewöhnlichen Praxis zugänglich werden soll, für eine der schwersten, die es überhaupt giebt. Ein solches Lehrbuch, was den Namen eines guten vollständig verdienen sollte, müfste offenbar zwei Erfordernisse vereinen, deren jedes für sich schon eine vielleicht noch nie genügend erreichte Aufgabe bildet. Zuvörderst nämlich müfste der Verfasser das, was er im Einzelnen nach und nach durch immer wiederholtes Studium in sich aufgenommen und zu seinen practischen Geschäften benutzt hat, dergestalt bei sich verarbeitet haben, dafs der sämmtliche Stoff ihm wie ein organisches System gegenüberstände, dessen einzelne Theile also nun nicht mehr blofs zusammengefügt, sondern als aus dem Ganzen gewachsen erschienen. Sodann aber müfste er sich in die Anschauungs-Weise seiner Leser so lebhaft zu versetzen wissen, dafs dieselben bei seinem Vortrage die ganze Lehre gleichsam mit zu erfinden und lauter ganz

einfache Dinge abgehandelt glauben könnten, an die sie nur zufällig nicht selbst schon gedacht hätten. — Vielfach vermehrt werden diese Schwierigkeiten noch wo es darauf ankommt, den Vortrag, ohne der Wissenschaft etwas zu vergeben, so populär als möglich zu halten.

Weit entfernt bin ich, wie gesagt, zu glauben, dafs ich mit gegenwärtigem Buche dieses mir vorschwebende Ideal erreicht hätte. Ihm mich aber wenigstens anzunähern, bin ich redlich bemüht gewesen. —

Was den Stoff anbelangt, so habe ich bei meinen practischen Arbeiten stets mir meine eigene Bahn zu brechen gesucht, nie verzweifelnd, wenn ich auch bei einzelnen Anwendungen oftmals immer wieder von vorn anfangen mufste. Obgleich ich nämlich besonders begünstigt dadurch mir erscheinen konnte, dafs ich von Zeit zu Zeit mündlicher und schriftlicher Mittheilungen des berühmten Verfassers der *Theoria motus c. c.* über einzelne Schwierigkeiten mich zu erfreuen hatte; so fehlte es doch auch keineswegs an Vorkommnissen, wo ich durch zum Theil sehr unangenehme Erfahrungen, die ich meinen Lesern ersparen möchte, erst auf das recht aufmerksam wurde, worauf es für die Anwendung im Einzelnen vorzüglich ankam. Allmählich verarbeitete ich mir so die in diesem Buche vorgetragenen Lehren zu einem Ganzen für die gewöhnlichen practischen Bedürfnisse, und nachdem ich nun drei Jahre darauf gewandt habe, das nach und nach gesammelte zusammenzuordnen und in möglichst populärer Weise darzustellen, ist mir bei manchen Einzelnheiten wirklich die Erinnerung entschwunden, ob ich sie aus Schriften, aus gelegentlichen Mittheilungen von *Gaufs*, oder aus eigenem Nachdenken gelernt habe.

Was sodann den Vortrag anbetrifft, so glaube ich das freundschaftliche Verhältnifs treu benutzt zu haben, in welchem ich gottlob stets mit meinen Zuhörern und Gehülfen stand. Da wir un-

ter einander das, worauf es im gegebenen Falle gerade ankam, immer zwanglos durchsprachen und sich mir mein Vortrag in ihnen gleichsam wieder abspiegelte, so glaube ich verbürgen zu können, dafs in diesem Buche nicht wohl eine Stelle vorkommen wird, wobei ein junger Mann, der in der practischen Geometrie gründlich unterrichtet ist, sich nicht leicht sollte durchhelfen können. Ich glaube dies um so mehr, als einer der älteren unter meinen gegenwärtigen Zuhörern, Herr *O. Börsch* aus *Hanau*, schon mein Manuscript gelesen und keinen Anstofs mehr gefunden hat.

Dagegen habe ich die Darstellung in diesem Buche gröfstentheils ausführlicher gehalten, als es zur Grundlage eines mündlichen Vortrags für wohl vorbereitete Zuhörer gerade nöthig gewesen wäre. Dies geschah zum Vortheile derjenigen Practiker, die sich dermalen zuerst mit diesen Lehren bekannt machen wollen, um sie in vorkommenden wichtigen Fällen unmittelbar anzuwenden. — Ich erinnere mich noch gar wohl der Zeit, wo der Landmesser, welcher mit den logarithmischen Tafeln umzugehen wufste, für den Gelehrten unter seinen Kollegen galt. Jetzt würde sich einer lächerlich zu machen glauben, wenn er sich ohne diese Kenntnifs nur zum Examen melden wollte. In ähnlicher Weise wird es demnächst wohl auch mit der Ausgleichungs-Rechnung gehen, deren Erlernung, wenn man sich auf das unmittelbare Bedürfnifs beschränkt, nicht mehr Anstrengung kostet als die der Algebra und Trigonometrie. — Wer aber jetzt neben seinen täglichen Geschäften sich damit bekannt machen will, der bedarf etwas mehr Ausführlichkeit als derjenige, der eine besondere Zeit darauf verwenden kann. Ich weifs aus eigener Erfahrung nur zu gut wie einem Practiker zu Muthe ist, der ermüdet, vielleicht durchnäfst, von der Tages-Arbeit heimkehrt, und nun bei der besten Thran-Lampe des Dorfes sich für den nächsten Rechentag vorbereiten will. In solchen Lagen wünscht man manches mit

deutlichen Worten ausgesprochen zu lesen, was man auf der ruhigen Studirstube leicht selbst ergänzt, und wiederholtes Erinnern an practisch wichtige Umstände wird da zum Bedürfnisse.

Freilich hätte wohl das Buch an Inhalt und Vortrag gewinnen können, wenn ich noch einige weitere Jahre auf seine Ausfeilung verwendet hätte. Dies glaubte ich aber aus zweien Gründen nicht thun zu dürfen.

Erstlich nämlich scheint es mir da, wo eine neue Disciplin ins practische Leben einzuführen ist, gar nicht so sehr darauf anzukommen, dafs das Lehrbuch schon in möglichster Vollendung ausgearbeitet auftrete, sondern vielmehr darauf, dafs nur erst einmal die Grundlage vorhanden sey, auf welche sich weiter fortbauen und der Faden, an welchen sich weitere Untersuchungen und Ausführungen anknüpfen lassen. — Sehr zu wünschen wäre es in dieser Hinsicht namentlich, dafs die practische Geometrie schon eine für sie besonders bestimmte Zeitschrift besäfse, wozu freilich, nach einigen von mir gemachten Erfahrungen, für jetzt noch wenig Hoffnung zu seyn scheint.

Sodann aber ist der Mensch nicht Herr seiner Zeit und seines Lebens. Sollte ich nun aber, nach dem oft wiederholten Wunsch ehemaliger Zuhörer, und nicht ohne Aufmunterung sachkundiger Freunde, meine Vorlesungen über practische Geometrie im Drucke herausgeben, so mufste damit einmal ein Anfang gemacht werden und somit fing ich mit dem letzten Theile an. (Der Titel, der das gegenwärtige Buch als solchen bezeichnet, wird seiner Zeit nachgeliefert werden.)

Mit dem letzten Theile aber machte ich den Anfang deshalb, weil ich meine ehemaligen Zuhörer und diejenigen Practiker, die sich meines Rathes bedienen wollen, doch vorerst in den Stand setzen mufs, überall da durchzukommen, wo ich selbst bisher in der Praxis durchgekommen bin.

Dieselben haben dieses Buch also als eine Ergänzung zu dem zu betrachten, was sie aus Vorträgen oder Schriften über practische Geometrie schon kennen, und wünsche ich von Herzen, dafs sie von dieser neuen Grundlage ausgehend sich bei ihren Geschäften immer mehr und mehr befriedigt finden mögen.

Correctheit des Druckes ist für Bücher dieser Art ein Haupt-Erfordernifs. Es ist dafür von Seiten des Herrn Verlegers, der Druckerei, und meiner geschehen, was möglich war, und hat namentlich Herr Professor *Bretschneider* in *Gotha* durch Uebernahme der ersten Correcturen sich uns zu grofsem Danke verpflichtet. Die demungeachtet noch nöthig gewordenen, am Ende angezeigten, Berichtigungen bitte ich vor der Benutzung im Buche selbst anzubringen.

Marburg, den 8. Januar 1843.

G.

Inhalt.

Einleitung.

		Seite
§. 1.	Eintheilung der Beobachtungsfehler in regelmäfsige und unregelmäfsige	1
– 2.	Ueberschüssige Anzahl der Beobachtungen	3
– 3.	Widersprüche zwischen den fehlerhaften Beobachtungen selbst oder zwischen den Folgerungen daraus	5
– 4.	Veränderung und Verbesserung der Beobachtungen. Princip der kleinsten Quadratsumme. Aufgabe der Ausgleichungs-Rechnung	6
– 5.	Bemerkungen über Gröfse der Fehler	10
– 6.	Bedingungen für das Minimum der Fehler-Quadrate	11
– 7.	Vorläufige Beispiele und Bemerkungen dazu	13
– 8.	Vollständigere Auffassung des aufgestellten Princips	19
– 9.	Berechtigung zur Aufstellung des Princips	23
– 10.	Unterscheidung der drei Hauptfälle der Anwendung	25
	Literarischer Zusatz	32

Erster Abschnitt.

Ausgleichung directer Beobachtungen.

Erstes Kapitel.

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

– 11.	Beschränkung auf eine Beobachtungs-Gröfse	33
– 12.	Eigenschaften des arithmetischen Mittels	33
– 13.	Berechnung der Quadratsumme der Verbesserungen	35
– 14.	Das arithmetische Mittel auf das Princip zurückgeführt	36

Seite

§. 15. Mittlere Abweichung der Beobachtungen 37
– 16. Mittlere Fehler der Beobachtungen 38
– 17. Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels 41
– 18. Begriff der Genauigkeit und Folgerungen daraus 42
– 19. Einschaltung aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung . . 45
– 20. Rechnungs-Beispiel 46
– 21. Practische Bemerkungen 50

Zweites Kapitel.

Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

– 22. Gewicht der Beobachtungen. Gewichts-Einheit 53
– 23. Arithmetisches Mittel im allgemeineren Sinne 56
– 24. Mittlere Fehler der Beobachtungen und des Mittels . . . 58
– 25. Mittlerer Fehler der Gewichts-Einheit 60
– 26. Rechnungs-Beispiel für eine Theodolithen-Messung . . 62
– 27. Reduction der Gewichte 64
– 28. Urtheil nach dem Erfolge 66

Drittes Kapitel.

Genauigkeit der Functionen der Beobachtungs-Gröfsen.

– 29. Vorbemerkungen und Aufstellung der Aufgabe 69
– 30. Summen und Differenzen zweier Beobachtungs-Gröfsen . 71
– 31. Rechnungs-Beispiele 73
– 32. Algebraische Summe mehrerer Beobachtungs-Gröfsen . . 75
– 33. Practische Bemerkungen 76
– 34. Vielfaches einer Beobachtungs-Gröfse 81
– 35. Rechnungs-Beispiele 82
– 36. Lineare Functionen von Beobachtungs-Gröfsen 85
– 37. Rechnungs-Beispiele 86
– 38. Beliebige Functionen der Beobachtungs-Gröfsen 91
– 39. Rechnungs-Beispiel 94
– 40. Bemerkungen über Gewichts-Einheiten für heterogene Beobachtungs-Gröfsen 97

Zweiter Abschnitt.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Viertes Kapitel.

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

– 41. Vorbemerkungen und allgemeine Aufgabe 102
– 42. Die sieben Haupt-Geschäfte 105

Seite

§. 43. Uebersicht und Bemerkungen 111
- 44. Rechnungs-Beispiele 113
- 45. Genauigkeit der Beobachtungen 130
- 46. Rechnungs-Beispiele 132
- 47. Genauigkeit der Elemente 133
- 48. Bemerkungen. Uebersicht der fünf nachträglichen Geschäfte 139
- 49. Rechnungs-Beispiele 141
- 50. Genauigkeit der Functionen der Elemente 144
- 51. Rechnungs-Beispiele 145

Fünftes Kapitel.

Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

- 52. Modification des sechsten Haupt-Geschäfts 148
- 53. Rechnungs-Beispiel 150
- 54. Genauigkeit der Beobachtungen und Elemente 152
- 55. Rechnungs-Beispiel 154
- 56. Horizont-Abschlufs 157
- 57. Practische Bemerkungen dazu 167

Dritter Abschnitt.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Sechstes Kapitel.

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

- 58. Vorbereitungen 171
- 59. Bedingungsgleichungen. Correlatengleichungen. Normalgleichungen 174
- 60. Uebersicht der acht Haupt-Geschäfte. Verweisung auf's Folgende 178
- 61. Genauigkeit der Beobachtungen 181
- 62. Rechnungs-Beispiel. Bedingungsgleichungen 1. Klasse . 182
- 63. Rechnungs-Beispiele. Bedingungsgleichungen 2. Klasse für Winkel 184
- 64. Rechnungs-Beispiele. Bedingungsgleichungen 2. Klasse für Richtungen 187
- 65. Bemerkungen dazu 194
- 66. Rechnungs-Beispiele. Bedingungsgleichungen 3. Klasse 198
- 67. Bemerkungen dazu 204
- 68. Rechnungs-Beispiele. Bedingungsgleichungen 2. u. 3. Klasse 206
- 69. Bemerkungen dazu 212

*

Siebentes Kapitel.

Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

Seite

§. 70. Modification des früheren Verfahrens 215
– 71. Genauigkeit der Beobachtungen 216
– 72. Rechnungs-Beispiele 217
– 73. Bemerkungen 221

Achtes Kapitel.

Genauigkeit der Functionen der Beobachtungs-Gröfsen.

– 74. Formeln für gleichgenaue Beobachtungen. Die sechs Uebertragungs-Geschäfte 223
– 75. Rechnungs-Beispiel für Winkel-Verbesserungen. Bemerkungen 229
– 76. Rechnungs-Beispiele für Richtungs-Verbesserungen . . 234
– 77. Modification für Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit 238
– 78. Rechnungs-Beispiele 240

Vierter Abschnitt.

Ansatz der Bedingungsgleichungen für bedingte Beobachtungen.

Neuntes Kapitel.

Vorbereitungen für den Ansatz.

– 79. Vorbemerkungen 247
– 80. Abzählung der unabhängigen Bedingungen im Allgemeinen 249
– 81. Aufsuchung und Darstellung der Bedingungen im Allgemeinen 253
– 82. Ansatz im Allgemeinen. Die drei Methoden 258
– 83. Beispiel des Ansatzes darnach 263

Zehntes Kapitel.

Ansatz für ebene Figuren, worin blofs Winkel gemessen sind.

– 84. Bedingungsgleichungen 1. Klasse 268
– 85. Abzählung der Bedingungen 2. Klasse 269
– 86. Aufsuchung, Darstellung und Ansatz für die 2. Klasse . . 274
– 87. Abzählung der Bedingungen 3. Klasse 276
– 88. Aufsuchung der Bedingungen 3. Klasse. Central-Systeme 281
– 89. Darstellung der Bedingungen 3. Klasse 285
– 90. Beispiel für Aufsuchung und Darstellung 3. Klasse . . . 288

Seite

§. 91. Ansatz der Bedingungsgleichungen 3. Klasse. Beispiele 292
– 92. Practische Bemerkungen 300

Elftes Kapitel.

Ansatz für ebene Figuren, worin blofs Linien gemessen sind.

– 93. Vorbemerkungen 310
– 94. Abzählung der Bedingungen 311
– 95. Aufsuchung der Bedingungen 312
– 96. Ansatz der Bedingungsgleichungen 313
– 97. Beispiele 315

Zwölftes Kapitel.

Ansatz für ebene Figuren, worin Winkel und Linien gemessen sind.

– 98. Abzählung der Bedingungen 1. und 2. Klasse 321
– 99. Abzählung der Bedingungen 3. Klasse 322
– 100. Beispiele 327
– 101. Aufsuchung und Darstellung der Bedingungen 3. Klasse . 329
– 102. Polygonmessung durch einzelne Winkel. Abzählung und Ansatz im Allgemeinen. Die sechs Lehrsätze 331
– 103. Ausführung des Ansatzes im Einzelnen 340
– 104. Rechnungs-Beispiele 346
– 105. Polygonmessung durch Compafsstriche. Abzählung, Darstellung, Ansatz 357
– 106. Rechnungs-Beispiele 362
– 107. Polygonmessung durch Azimuth-Uebertragung. Zurückführung auf's Vorhergehende 367
– 108. Practische Bemerkungen 370

Nachtrag.

Ueber Elimination aus Normalgleichungen.

– 109. Directe Elimination 376
– 110. Bemerkungen dazu 382
– 111. Indirecte Elimination 386
– 112. Bemerkungen dazu 394

Druckfehler und Berichtigungen.

S. 30	Z. 11	v. o.	für $p-3$	lies	$2p-3$
- 39 -	17	-	- $W-M=O-M$	-	$W-M=m.$
- 87 -	5	-	- $m_1 m_2$	-	$m_1 ; m_2$
- 99 -	9	-	- $\left(\frac{ll}{p}\right)$	-	$\left[\frac{ll}{p}\right]$
- 141 -	5	-	- 0,482	-	482
- 141 -	7	v. u.	- q_1	-	q_2
- 141 -	8	-	- q_1	-	q_2
- 142 -	4	-	- $\frac{1}{P^2}$	-	$\frac{1}{P_2}$
- 160 -	14	-	- $+\mathrm{d}E_2$	-	$-\mathrm{d}E_2$
- 165 -	12	-	- e_4	-	e_3
- 189 -	3	-	- Bedingungsgleichungen	-	Bedingungsgleichung
- 228 -	9	-	- $m_1\sqrt{LL}$	-	$m_1\sqrt{[LL]}$
- 240 -	5	v. o.	- jenem §.	-	§. 75.
- 264 -	6	v. u.	- $log^{2}_{3}{}^{1}$	-	$log\,sin^{2}_{3}{}^{1}$
- 267 -	1	v. o.	- $^{2}_{1}{}^{3}$	-	$\left(^{2}_{1}{}^{3}\right)$
- 292 -	15	-	- §. 82.	-	§. 78.
- 378 -	7	v. u.	- i_2+i	-	i^2+i
- 396 -	15	v. o.	- $a_2{}^{p}K_2$	-	$a_2{}^{p}K_1$.

Uebrigens sind S. 234, 241 und 245 in den Ausdrücken für du die Verbesserungen ohne Weiteres für die Differentiale geschrieben, wodurch die l und L entgegengesetzte Zeichen erhielten, und ist vergessen dabei zu bemerken, dafs der Grund, warum dies verstattet sey, aus §. 38. und §. 74. erhelle.

Einleitung.

§. 1.

Keine unmittelbar gemessene Gröfse, und somit auch keine us Messungen geschlossene oder berechnete Gröfse ist für bsolut richtig zu halten. Wie sorgfältig auch der Practi-:er verfahren möge, immer wird er darauf gefafst seyn müs-en, irgend einen, wenn auch noch so kleinen, Fehler bei einer jedesmaligen Messung zu begehen. — Die Ursa-hen solcher Fehler sind zwar mannichfach, es lassen sich och aber, abgesehen von den sogenannten groben d. h. lachlässigkeits-Fehlern, die wir durch gehörige Sorgfalt nmer ganz vermeiden können, zwei verschiedene Gattun-en derselben unterscheiden.

Regelmässige oder constante Fehler nennen wir ämlich solche, welche, wenn dieselbe Messung unter den-elben Umständen wiederholt würde, nothwendig auch wie-er in derselben Gröfse statt haben müfsten, oder: deren röfse, nach irgend einem bestimmten Gesetze, mit den edesmaligen Umständen zusammenhängt. Die Ursachen olcher Fehler müssen bleibend seyn, und müssen, wegen der esetzmäfsigkeit ihrer Wirkung, aufgefunden werden kön-

nen; es ist deshalb immer eine Haupt-Aufgabe der wissenschaftlichen Praxis, die Messungen von dieser Art von Fehlern rein zu halten, d. h. zuerst sorgfältig die Ursachen der regelmässigen Fehler zu erforschen und dann entweder diese Ursachen selbst zu vertilgen, oder, nach Ausmittelung des Gesetzes der daraus entspringenden Fehler, letztere durch Berechnung oder Elimination zu entfernen. Beispiele solcher constanten Fehler anzuführen wird hier nicht mehr nöthig seyn. Die practische Geometrie behandelt sie ausführlich. — Wir werden uns auch in der gegenwärtigen Betrachtung gar nicht mehr damit beschäftigen, sondern setzen vielmehr voraus, dafs Beobachtungen, welche ein gehörig unterrichteter und gewissenhafter Practiker zu weiterer Bearbeitung bestimmt oder einliefert, davon schon frei seyen.

Die Fehler der zweiten Gattung, welche wir unregelmäfsige, zufällige oder unvermeidliche Fehler nennen, haben dagegen veränderliche Ursachen, deren Einwirkung auf die einzelnen Beobachtungen keinem bestimmten Gesetze unterliegt und also auch keiner Berechnung unterworfen werden kann. Diese Fehler werden, ihrer Natur nach, durch unsere Bemühung nur in immer engere Gränzen eingeschlossen, nie, wie die constanten, ganz aufgehoben werden können. Unser Streben wird also auch immer nur darauf gerichtet seyn können, sie so klein und so unschädlich zu machen als möglich. Dahin gehören also vorerst die Fehler, welche aus Mangelhaftigkeit unserer Sinne entstehen, deren Schärfe doch immer nur bis auf einen gewissen Grad, durch Uebung, Anstrengung und Instrumentalhülfe (z. B. Fernröhre), gesteigert werden kann ohne je absolut zu werden. Ferner gehören dahin die Fehler, welche aus äufseren, unvermeidlichen, uns unbekannt

bleibenden Einflüssen erzeugt werden, z. B. bei Winkelbeobachtungen durch unbemerkte Lichtphasen, Luftzitterungen, Lateral-Refractionen, Erschütterungen durch den Wind u. dergl. Eben so sind dazu zu rechnen die unvermeidlichen Fehler, welche in den Instrumenten und deren Behandlung zurückbleiben. Kein Instrument steht absolut fest, keines ist absolut richtig construirt und rectificirt, kein constanter Fehler absolut eliminirt; es bleiben also immer noch unvermeidliche Kleinigkeiten übrig, für die wir nicht mehr einstehen können. Endlich gehören hierher, wir wollen es nur gestehen, die unvermeidlichen Mängel unserer Aufmerksamkeit; denn wie sorgfältig wir auch verfahren, wie sicher wir auch vor groben Fehlern seyn mögen, das müssen wir doch zugeben, dafs wir das eine Mal besser aufgelegt sind genau zu beobachten als das andere Mal.

So wie wir nun in der practischen Geometrie lernen die constanten Fehler zu vermeiden, oder bis auf unvermeidliche Kleinigkeiten wegzuschaffen, so müssen wir nun auch die zufälligen und unvermeidlichen Fehler wenigstens möglichst unschädlich zu machen, ihre Gröfse zu schätzen und danach den Grad der Genauigkeit unserer Arbeiten und der Folgerungen, welche wir daraus durch Rechnung ableiten wollen, zu beurtheilen lernen. Dies ist die Aufgabe der Ausgleichungs-Rechnung, womit wir uns hier beschäftigen wollen.

§. 2.

So oft wir unsere Beobachtungen darauf beschränken nur das zu messen, was zur Erreichung eines gewissen Zweckes unumgänglich nöthig ist, so können wir an ihnen keinerlei Art von Fehlern bemerken, ja selbst grobe könnten unentdeckt bleiben. Wir sind also ohne alle Kenntnifs

von der Beschaffenheit und Gröfse der Fehler. — Hieraus folgt zunächst, dafs um Fehler im Allgemeinen und insbesondere das Daseyn von unregelmäfsigen nur zu erkennen, vorerst nöthig ist, dafs mehr Beobachtungen angestellt seyen, als für den Zweck unumgänglich nothwendig waren. Das practische Gefühl, welches der wissenschaftlichen Untersuchung gewöhnlich vorauszueilen pflegt, leitete auch schon von jeher dahin, neben den nothwendigen Messungen noch sogenannte Control- oder Probe-Messungen anzustellen, also z. B. eine vorgegebene Linie wenigstens doppelt zu messen; in einem Dreiecke nicht blofs die beiden unentbehrlichen Winkel, sondern zur Prüfung auch noch den dritten zu messen; bei Linear-Messungen sogenannte Prüfungs-Linien einzuführen; in einem Triangelsystem nicht blofs die eine unentbehrliche Basis, sondern noch eine sogenannte Versicherungs-Basis zu messen u. s. w. Der Zweck solcher Maafsregeln war kein anderer, als den absolut nothwendigen Beobachtungen wenigstens eine überschüssige beizugesellen, deren Benutzung denn zunächst darin zu bestehen pflegte, dafs sie, eben als überschüssig, sich auch aus den übrigen unentbehrlichen auf irgend eine Weise, durch Rechnung oder Zeichnung, ableiten lassen mufste, und man also durch Vergleichung des so abgeleiteten Werths mit dem, welchen die unmittelbare Beobachtung ergab, ein Mittel fand, nicht nur sich gegen etwanige grobe Fehler ganz sicher zu stellen, sondern auch, insofern sich nur unbedeutende Differenzen ergaben, sich in der Regel bei den nothwendigen Beobachtungen zu beruhigen und letztere als „richtig" oder „genügend" anzuerkennen. — Diese Art der Benutzung von Probe-Messungen erweist sich aber bei näherer Betrachtung schon von vorn herein als mangelhaft; denn entweder hatte die Probe-Messung dieselbe

oder eine gröfsere Genauigkeit als welche den übrigen Beobachtungen zukam, oder aber sie war weniger genau. In letzterem Falle geschah den übrigen Messungen Unrecht, wenn man sie nach der weniger genauen beurtheilte, in ersterem Fall aber war es offenbar nicht recht, sich bei den übrigen Beobachtungen zu beruhigen, dagegen die eben so gute oder gar bessere Probe-Messung blofs als Beruhigungs-Mittel zu gebrauchen, sie selbst aber dann nicht weiter zu beachten. Auch diesem Mangel begegnete schon früher wenigstens theilweise und in einzelnen Fällen das practische Gefühl, indem es uns lehrte, bei geraden Linien aus zwei gleich sorgfältigen Messungen das arithmetische Mittel zu nehmen u. s. w.

Unser Streben mufs nun aber dahin gerichtet seyn, dafs in allen Fällen, wo Beobachtungen in überschüssiger Anzahl vorhanden sind, jeder einzelnen ihr eigenthümliches Recht widerfahre und alle auf diese Weise zusammenwirken, um ein möglichst fehlerfreies Resultat zu geben, sich aber unter einander zu prüfen und zu berichtigen.

§. 3.

Sind nun aber Beobachtungen in überschüssiger Anzahl angestellt, so wird sich das Vorhandenseyn der in ihnen enthaltenen unvermeidlichen Fehler im Allgemeinen und in der Regel dadurch bemerklich machen, dafs unter den Beobachtungen selbst, oder den daraus gezogenen Folgerungen, Widersprüche statt finden. — Haben wir z. B. einen und denselben Winkel dreimal gemessen, so müssen wir darauf rechnen, dafs die drei Angaben, wenn auch noch so wenig, von einander verschieden sind, und also jede einzelne über die wahre Gröfse des gemessenen Winkels eine Aussage abgiebt, welche die Angaben der beiden an-

dern negirt. Wollen wir von einem Punkt *A* aus die gegenseitige Lage dreier geraden Linien *AB*, *AC*, *AD* bestimmen und dazu eine überschüssige Beobachtung mitbenutzen, so werden wir die Winkel *BAC*, *CAD* und auch noch *BAD* messen; und haben dann zu erwarten, dafs die Messung der Summe *BAD* etwas verschieden ausfällt von der, aus der Addition der beiden übrigen gemessenen Winkel, berechneten Summe. — Messen wir in einem Dreieck alle drei Winkel, so wird der Widerspruch sich darin finden, dafs jeder Winkel durch die Messung selbst etwas anders angegeben wird, als wir ihn durch Berechnung aus den beiden andern finden; u. s. w.

Im Allgemeinen und in der Regel, sagten wir, wird solcher Widerspruch statt finden, sobald zufällige Fehler vorhanden sind; denn wir können allerdings die Möglichkeit nicht läugnen, dafs in einzelnen Fällen der Widerspruch wegfallen könnte, („die Probe-Messungen genau stimmten"). Solches Ereignifs müfsten wir aber dann selbst für zufällig halten, und darauf rechnen, dafs noch weitere angestellte, mit unvermeidlichen Fehlern behaftete, Beobachtungen einen Widerspruch zum Vorschein bringen würden, weil sonst entweder die Beobachtungen ganz fehlerfrei seyn müfsten, was nicht möglich ist, oder die begangenen Fehler nicht zufällig wären, was gegen unsere Voraussetzung ist.

§. 4.

Der Umstand, dafs sich Widersprüche in unsern, in überschüfsiger Anzahl vorhandenen, Beobachtungen finden, macht es uns nun unmöglich mit absoluter Gewifsheit die Wahrheit zu erkennen, welche wir suchen. Es sind gleichsam mehrere gleich glaubwürdige Zeugen-Aussagen über eine und dieselbe Thatsache vorhanden, welche aber von

einander etwas abweichen. Wir müssen uns also begnügen statt der gesuchten Wahrheit selbst eine derselben möglichst angenäherte Angabe zu finden, welche wir für die Wahrheit annehmen können und so lange wenigstens annehmen müssen, bis etwa, durch neu hinzugekommene Beobachtungen, eine weitere Annäherung zu gewinnen steht.

Die Grund-Bedingung, um zu solcher, statt der Wahrheit anzunehmenden, Angabe zu gelangen, ist nun: dafs wir die vorhandenen Beobachtungen dergestalt ändern, dafs alle in ihnen vorhandenen Widersprüche gänzlich aufgehoben werden. Diese Nothwendigkeit wird uns nicht etwa von der Mathematik, sondern von der allgemeinen Logik auferlegt, welche uns nicht gestattet irgend etwas für wahr anzunehmen, was Widersprüche enthält, oder auf Widersprüche führt. Wir müssen nun aber zunächst uns fragen, wie wir ändern sollen, um den weiteren Zweck zu erreichen, dafs unsere endliche Angabe, die wir für die unerreichbare Wahrheit annehmen wollen, derselben auch, nach den eben vorliegenden Umständen, wenigstens möglichst genähert sey.

Da wir von constanten Fehlern zu abstrahiren, also vorauszusetzen haben, dafs nur zufällige unvermeidliche Fehler die Widersprüche veranlafsten, so müssen unsere Aenderungen vorerst Verbesserungen seyn, welche die Einwirkung zufälliger Fehler, in dieser Hinsicht wenigstens vollständig, aufzuheben geeignet sind; dies führt uns aber zur Kenntnifs ihrer Form.

Die zufälligen Fehler können wir uns nämlich immer als kleine Gröfsen von derjenigen Gattung denken, die den Beobachtungen selbst zukommt, (also z. B. kleine Linien, bei Linienmessung; kleine Winkel bei Winkelmessung; u. s. w.) welche wir durch unregelmäfsig wirkende, veränderliche und

uns unbekannte, Ursachen in unsere, sonst fehlerfreie, Beobachtungen unbewufst aufzunehmen oder aus ihnen unbewufst wegzulassen veranlafst wurden. Demnach wissen wir über die Beschaffenheit und Form der Verbesserungen, die wir anbringen wollen, wenigstens schon so viel, dafs es ähnliche kleine Gröfsen von der Gattung der Beobachtungen seyn müssen, welche eben sowohl positiv als negativ seyn können, und welche, zu den gegebenen Beobachtungsgröfsen (algebraisch) addirt, die Widersprüche heben.

Zur Bestimmung der Gröfse der Verbesserungen müssen wir aber im Auge behalten, dafs wir für die Wahrheit kein anderes Zeugnifs besitzen, als welches unsere ursprünglichen Beobachtungen ablegen; dafs die Anbringung von Verbesserungen an dieselben ein, durch äufsere zufällige, nicht in unserer Gewalt befindliche Ursachen herbeigeführtes, nothwendiges Uebel ist, und dafs wir also, indem wir uns der unerreichbaren Wahrheit möglichst nähern wollen, dieses Uebel so klein als möglich zu machen, oder uns dem unmittelbaren Zeugnifs der Beobachtungen so nahe als möglich anzuschliefsen haben.

Diesem Bedürfnifs entsprechen wir nun, indem wir für die Gröfse der Verbesserungen als Princip festsetzen, dafs die Summe der Quadrate der Verbesserungen so klein als möglich werde.

Bezeichnen wir also die wahren, durch die Beobachtungen zu findenden, Gröfsen mit $O_1 O_2 O_3$ u. s. w.; bezeichnen wir ferner die wirklich beobachteten Gröfsen mit $o_1 o_2 o_3$ u. s. w.; ihre, dem obigen Princip gemäfs festgesetzten, Verbesserungen mit $v_1 v_2 v_3$ u. s. w., so müssen wir die (algebraischen) Summen $o_1 + v_1$; $o_2 + v_2$; $o_3 + v_3$, u. s. w., welche wir ausgeglichene Beobachtungen (*observationes compensatas*) nennen, für die wahren zu be-

obachtenden Gröfsen $O_1 O_2 O_3$ nehmen, so lange wenigstens, als nicht neue Hülfsmittel zur gröfseren Annäherung an die Wahrheit hinzukommen. Unter demselben Vorbehalte müssen wir dann, consequenter Weise, auch $-v_1$; $-v_2$; $-v_3 \ldots$ für die unvermeidlichen Fehler halten, die in unsern Beobachtungen, uns unbewufst, enthalten waren, und machen somit auch stillschweigend für die Gröfse dieser Fehler die Voraussetzung der kleinsten Quadratsumme.

Demnach haben wir nun, wenn Beobachtungen in überschüssiger Anzahl vorliegen, uns zuerst die Widersprüche klar zu machen, welche in ihnen liegen oder aus ihnen folgen; sodann aber die Aufgabe der Ausgleichungs-Rechnung im Allgemeinen so auszusprechen:

> Für das System der wirklich beobachteten Gröfsen ist ein anderes System von Gröfsen zu substituiren, welche die beiden Eigenschaften haben, dafs 1) alle Widersprüche wegfallen, die sich in den Beobachtungen oder deren Folgerungen finden; und dafs 2) die Unterschiede zwischen den beobachteten und substituirten eine möglichst kleine Quadratsumme geben.

Das Princip, was wir der Auflösung zum Grunde legen, und unsere Berechtigung zur Aufstellung desselben bedarf nun allerdings noch einer weiteren Erörterung und Rechtfertigung. Diese wollen wir uns aber einstweilen noch vorbehalten, und jetzt zuerst einige Bemerkungen machen, die uns bei unsern weiteren Betrachtungen stets gegenwärtig bleiben müssen.

§. 5.

Bei der Anwendung unserer Aufgabe haben wir vor allem im Auge zu halten, dafs sie nur gegen die unvermeidlichen Fehler gerichtet ist, um aus guten Beobachtungen allen möglichen Nutzen für Erforschung der Wahrheit zu ziehen. Beobachtungen nennen wir aber im Allgemeinen gut, wenn bei ihnen alle Sorgfalt angewandt ist, um constante Fehler zu vermeiden und die Gränzen für die unvermeidlichen Fehler so eng zu ziehen, als die Umstände irgend zulassen. Dies bestimmt zwar nichts über die absolute Gröfse solcher Fehler, und wir würden z. B. eine Winkel-Beobachtung, die einen Fehler von 3 Minuten hätte, noch immer gut nennen können, wenn sie mit einem 4 zölligen Compafs gemacht wäre, statt dafs ein Fehler von dieser Gröfse bei einer guten Beobachtung mit einem 4 zölligen Theodolithen nicht vorkommen kann. Wohl aber können wir aus der Vorstellung, die wir uns von guten Beobachtungen und unvermeidlichen Fehlern gebildet haben, die Folgerung ziehen, dafs wir diese Fehler und also auch die zu möglichster Wegschaffung ihres Einflusses bestimmten Verbesserungen, in Beziehung auf die Gegenstände unserer jedesmaligen Beobachtung, als sogenannte verschwindend kleine Gröfsen betrachten müssen; ein Begriff, den wir uns schon in früheren Vorträgen geläufig gemacht haben.

Dies heifst also mit andern Worten: Wenn wir statt der beobachteten Gröfsen o die ausgeglichenen Beobachtungen $o+v$ substituiren, und diese nun für die wahren zu beobachtenden O annehmen wollen, so ist dies nur in der Voraussetzung zulässig, dafs die von uns zu findenden v in Beziehung auf die bei Messung der o angewandten Hülfsmittel unmessbar klein seyen; dies ist eine wesentliche

Bedingung aller unserer folgenden Untersuchungen. Wir machen diese Bemerkung von vorn herein aus doppeltem Grunde. Erstlich: um den Irrthum ferne zu halten, als ob wir mit unserer Ausgleichungs-Rechnung irgend etwas zur Verbesserung schlechter Beobachtungen ausrichten, und also im Vertrauen auf sie uns bei Anstellung der Beobachtungen irgend mindere Sorgfalt erlauben dürften. Sodann aber müssen wir uns diese Bemerkung stets vergegenwärtigen, wenn wir im Verfolg unserer Arbeiten gegebene endliche Gleichungen zwischen den zu beobachtenden Gröfsen O selbst, oder zwischen diesen und andern Gröfsen zu differentiiren, und die dabei vorkommenden Differentiale als wirkliche Gröfsen, also die $\mathrm{d}O$ als unsere $-v$ zu behandeln uns verstatten wollen. Ein Verfahren, von welchem unten eine Menge von Beispielen vorkommen werden.

§. 6.

Ehe wir nun in weitere Erörterungen über unser aufgestelltes Princip eingehen, müssen wir uns vorerst vergewissern, dafs wir es auch richtig verstehen. Wir wollen aber zur Abkürzung nun gleich hier eine Bezeichnung einführen, die uns auch in allem Folgenden von grofsem Nutzen seyn wird, indem wir

$$v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + v_4 v_4 + \ldots = [vv]$$

setzen, und uns überhaupt zur Regel machen, mit einem, von eckigen Klammern eingeschlossenen, Buchstaben-Ausdruck die Summe aller jedesmal zu beachtenden, gleichartigen und nur in den Ordnungszahlen verschiedenen Buchstaben-Ausdrücke zu bezeichnen, so dafs also z. B.

$$[v] = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots$$

$$[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + \ldots$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = \frac{a_1 b_1}{p_1} + \frac{a_2 b_2}{p_2} + \frac{a_3 b_3}{p_3} + \ldots \text{ u. s. w. ist.}$$

Unser Princip sagt nun: Es soll $[vv]$ ein Minimum werden. Wir haben also zuerst $[vv]$ als eine Funktion der Beobachtungs-Gröfsen O, oder anderer Gröfsen, die mit diesen in irgend einem bekannten nothwendigen Zusammenhange stehen, uns zu denken und darzustellen, und dann nach bekannten, in den Anfangsgründen der Differential-Rechnung vorgetragenen, Regeln die Bedingung oder die Bedingungen für das Minimum aufzustellen und diese zu erfüllen.

Es wird aber wohl nicht unangemessen seyn, diese Regeln, so weit sie bei gegenwärtiger Untersuchung in Betracht kommen, hier in der Kürze in's Gedächtnifs zurückzurufen. Dies sind folgende:

1) Wenn q als abhängige Veränderliche mit einer andern unabhängigen Veränderlichen x durch eine Gleichung zusammenhängt, welche man allgemein durch:

$$q = f(x) \text{ oder } 0 = F(q, x)$$

bezeichnen kann, so sind zwei Haupt-Fälle möglich. Entweder a) wird bei stetig wachsendem x das q auch α) stetig wachsen oder β) stetig abnehmen; oder b) es wird, während x stetig wächst, sich ein Werth von x finden lassen, bei welchem q entweder α) aufhört zu wachsen und anfängt abzunehmen, oder β) aufhört abzunehmen und anfängt zu wachsen. Der Werth von q, in welchem der Fall b. β eintritt, heifst ein Minimum von q in Beziehung auf x, und ist also kleiner als der nächstvorhergehende und zugleich kleiner als der nächstfolgende Werth von q. — Wollen wir nun dasjenige x finden, bei welchem ein Minimum von q stattfindet, so müssen wir zuerst den Differential-Quotienten $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$ entwickeln, diesen $= 0$ setzen, und aus der so entstehenden Gleichung das x bestimmen. Wir erinnern

uns nun freilich, dafs dieselbe Bedingung auch für ein Maximum (den Fall b. α.) zu erfüllen ist, und dafs also bei allgemeinen Untersuchungen noch eine weitere Discussion erforderlich ist, ob das eine oder das andere stattfinde. Diese fällt hier aber weg, weil nach den bisher abgehandelten Grundsätzen über die Natur der v und also auch der $[vv]$ von einem Maximum gar nicht die Rede seyn kann.

2) Wenn q nicht von einer, sondern von mehreren unabhängigen Veränderlichen abhängig ist, und man also eine Gleichung von der Form $q = f(x,y,z)$ oder $0 = F(q,x,y,z)$ annimmt; so erweitert sich der Begriff vom Minimum. Wir können hier nämlich für beliebig angenommene Werthe von y und z das q zu einem Minimum in Beziehung auf x machen, und hätten zu dem Ende, nach dem Vorigen, die Gleichung partiell zu differentiiren, um $\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ zu setzen. — Wir suchen aber nicht ein solches relatives Minimum, sondern ein absolutes, und müssen also für jede unabhängige Veränderliche einen ähnlichen partiellen Differential-Quotienten finden. Demnach haben wir die endliche Bestimmung unserer unabhängigen Veränderlichen in Auflösung der Gleichungen zu suchen, welche sich ergeben, wenn wir $\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right) = 0$; $\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right) = 0$; $\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right) = 0$ setzen; und solcher Gleichungen sind jedesmal so viel vorhanden, als wir unabhängige Veränderliche zu bestimmen haben. Aus ihnen entwickeln wir also, wo nöthig durch Elimination, die Werthe von x, y und z, bei welchen q ein absolutes Minimum wird.

§. 7.

Es scheint zweckmäfsig, ehe wir weiter gehen, vorläufig ein Paar leichte Beispiele ausführlich vorzunehmen, um das Vorhergehende dadurch zu erläutern.

1) Sey O die noch unbekannte Länge einer geraden Linie, und seyen zu ihrer Bestimmung vier Messungen vorgenommen, welche z. B. gegeben hätten

$$o_1 = 123{,}81$$
$$o_2 = 123{,}86$$
$$o_3 = 123{,}81$$
$$o_4 = 123{,}83.$$

Der Widerspruch zwischen den Beobachtungen liegt hier darin, dafs nicht $o_1 = o_2 = o_3 = o_4$ ist, obwohl alle vier der wahren Länge gleich seyn sollen. Es sind also die Verbesserungen so einzurichten, dafs die ausgeglichenen Beobachtungen $o_1 + v_1$; $o_2 + v_2$; $o_3 + v_3$; $o_4 + v_4$ einander gleich werden; und da wir sodann letztere für den wahren Werth des unbekannten O annehmen müssen, so lange nicht neue Beobachtungen hinzukommen, so ist zu setzen

$$v_1 = O - o_1$$
$$v_2 = O - o_2$$
$$v_3 = O - o_3$$
$$v_4 = O - o_4.$$

Um nun die Zahlen-Werthe für die v zu entwickeln, bilden wir $[vv]$ und erhalten so die Gleichung

$$[vv] = (O-o_1)^2 + (O-o_2)^2 + (O-o_3)^2 + (O-o_4)^2.$$

Hier ist nun O die einzige Veränderliche, welche wir unserm Zweck gemäfs festzusetzen haben. Wir differentiiren also und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,O} = 2(O-o_1) + 2(O-o_2) + 2(O-o_3) + 2(O-o_4).$$

Demnach mufs, damit $[vv]$ so klein als möglich sey, die Gleichung statt finden

$$0 = (O - o_1) + (O - o_2) + (O - o_3) + (O - o_4).$$

Lösen wir diese Gleichung auf, so ergiebt sich

$$O = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + o_4}{4} = 123{,}8275$$

und demnach

$$v_1 = +0{,}0175$$
$$v_2 = -0{,}0325$$
$$v_3 = +0{,}0175$$
$$v_4 = -0{,}0025.$$

Wir haben also das arithmetische Mittel für den wahren Werth zu nehmen, und machen hier die merkwürdige Erfahrung, dafs unser Princip uns auf dieselbe Rechnungs-Operation zurückführt, welche seit Jahrhunderten, ehe von Ausgleichungs-Rechnungen im Allgemeinen die Rede seyn konnte, von dem practischen Gefühle vorgeschrieben wurde.

2) Es sey ein Punkt in der Ebene zu bestimmen. — Dazu müfsten wir in Beziehung auf eine beliebige Abscissenlinie zwei rechtwinklige Coordinaten fehlerfrei beobachten. Es sey also

$$X = O_1$$
$$Y = O_2.$$

Stellen wir aber die Messung der beiden Coordinaten mehrfach an, so erhalten wir z. B. bei

der ersten Messung	$x_1 = o_1$	$y_1 = o_2$
— zweiten —	$x_2 = o_3$	$y_2 = o_4$
— dritten —	$x_3 = o_5$	$y_3 = o_6$.

Der durch die unvermeidlichen Fehler herbeigeführte, und durch die Ausgleichung wegzuschaffende, Widerspruch ist hier ein doppelter. Es wird nämlich weder genau $o_1 = o_3 = o_5$ noch auch genau $o_2 = o_4 = o_6$ seyn; und wir haben also nach unsern bisherigen Regeln zu setzen

$$v_1 = X - x_1 \qquad v_2 = Y - y_1$$
$$v_3 = X - x_2 \qquad v_4 = Y - y_2$$
$$v_5 = X - x_3 \qquad v_6 = Y - y_3.$$

Hiernach ist also

$$[vv] = (X-x_1)^2 + (Y-y_1)^2 + (X-x_2)^2 + (Y-y_2)^2 + (X-x_3)^2 + (Y-y_3)^2.$$

Diese Gleichung enthält zwei unabhängige Veränderliche; wir müssen also zweimal partiell differentiiren, erst in Beziehung auf X, dann in Beziehung auf Y, und erhalten so

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,X}\right) = 2(X-x_1) + 2(X-x_2) + 2(X-x_3)$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,Y}\right) = 2(Y-y_1) + 2(Y-y_2) + 2(Y-y_3).$$

Nun müssen wir $\left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,X}\right) = 0$ und $\left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,Y}\right) = 0$ setzen. Die beiden daraus entstehenden Gleichungen enthalten die X und Y schon getrennt, wir brauchen also nicht erst zu eliminiren, und bekommen also endlich

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

3) Ganz eben so hätten wir nach denselben Grundsätzen zu verfahren, wenn ein Punkt des Raumes durch drei rechtwinklige Coordinaten X, Y, Z zu bestimmen, und die Messung derselben dreimal angestellt wäre. Wir erhalten am Ende

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Diese Beispiele geben noch zu einigen Bemerkungen Veranlassung, die wir doch gelegentlich gleich mitnehmen wollen.

Wir sehen nämlich, dafs auch in dem Fall, wo für die Coordinaten nicht eine gleiche Anzahl von Beobachtungen vorläge, doch das arithmetische Mittel aus den Messungen jeder einzelnen genommen werden müfste. Also wenn z. B.

im dritten Beispiele nicht für alle Punkte vollständig alle Coordinaten beobachtet wären, sondern nur 2 Beobachtungen für X, dagegen 3 Beobachtungen für Y und 4 Beobachtungen für Z vorlägen; so würden wir ganz nach denselben Principien erhalten

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Ferner bemerken wir, dafs im zweiten Beispiele $(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2$ der Ausdruck ist für das Quadrat des Abstandes eines, durch x_1 und y_1 allein bestimmten, Punktes von dem durch X und Y bestimmten. Da nun aber, bei vollständiger Beobachtung aller Coordinaten, unser $[vv]$ nichts anderes ist, als die Summe der Ausdrücke, die auf diese Weise aus allen einzelnen Bestimmungen entstehen, so erkennen wir, dafs unser Verfahren uns denjenigen Punkt für den wahren zu nehmen lehrt, dessen Abstände von den anderen, durch die einzelnen vollständigen Beobachtungen gefundenen, eine möglichst kleine Quadrat-Summe geben. — Ganz dieselbe Eigenschaft zeigt der im dritten Beispiele gefundene Punkt, wenn die Beobachtungen vollständig sind. Auch im ersten, wo die Punkte alle in gerader Linie lagen, ist die Quadratsumme der Abstände ein Minimum geworden.

Diese Beispiele zeigen überdiefs auch noch eine merkwürdige Analogie mit bekannten mechanischen Lehren. Denken wir uns nämlich verschiedene Punkte einer unschweren Linie, einer unschweren Ebene oder eines geometrischen Körpers, mit gleichen Gewichten belastet, so finden wir die Coordinaten des Schwerpunktes bekanntlich dadurch, dafs wir das arithmetische Mittel aus den Coordinaten der einzelnen belasteten Punkte nehmen. Wir nehmen nach unserem Princip nun aber auch das arithmetische Mittel zwi-

schen den Coordinaten der (vollständig) beobachteten einzelnen Punkte. Jede einzelne vollständige Beobachtung legt also gleichsam dem durch sie angegebenen Punkte ein gewisses, stets gleiches Gewicht bei, und der Punkt, den wir endlich für den wahren annehmen, bringt dann alle beobachteten mit einander in's Gleichgewicht, und ist demnach als mit dem Gewicht aller einzelnen belastet zu denken. Diese Analogie hat Veranlassung zu der Redensart gegeben: „die Beobachtungen in's Gleichgewicht setzen", welche gleichbedeutend ist mit dem Ausdruck „ausgleichen," so wie wir letzteren in dem §. 4. definirten.

Die eben erwähnte Analogie läfst sich noch weiter ausdehnen, wie wir hier auch noch vorläufig bemerken wollen. Wenn nämlich zwei vollständige Beobachtungen unter einander genau übereinstimmten, so würde dies in unserem Gleichnifs soviel seyn, als ob zwei der gleichen Gewichte einen und denselben Punkt belasteten. In der Berechnung des Schwerpunktes würde dies keinen Unterschied machen, nur dürften wir nicht versäumen die Coordinaten des doppelt belasteten Punktes zu verdoppeln, ehe wir das arithmetische Mittel nehmen. Dasselbe müfsten wir thun, wenn wir z. B. in unserem ersten Beispiele die dritte Beobachtung weglassen, dabei aber bemerken wollten, dafs die damit genau übereinstimmende erste Beobachtung für eine doppelte gilt. Wir hätten dann in unserer Rechnung überall für die Ordnungszahl 3 ein zweites 1 zu setzen und bekämen so $[vv] = 2v_1v_1 + v_2v_2 + v_4v_4$ und endlich

$$O = \frac{2o_1 + o_2 + o_4}{4}.$$

§. 8.

Noch müssen wir zum richtigen Verständnifs unseres Princips eines Umstandes erwähnen, der bei Anwendung der Ausgleichungs-Rechnung auf practische Fälle grofsen Theils nicht zur Berücksichtigung kommt, und defshalb nur gar zu leicht vergessen wird, zumal da selbst in der Wort-Fassung des Princips eine Unbestimmtheit darüber zurückbleibt. Treten nun aber Fälle ein, wo es nicht erlaubt ist, ihn aufser Acht zu lassen, so kann dieses zu den gröfsten Irrthümern Veranlafsung geben, denen wir hier schon vorbauen wollen.

Die Verbesserungen, die wir suchen, sind nämlich eben so wie die Fehler immer Gröfsen von der Gattung der Beobachtungen selbst, und also concrete in benannten Zahlen auszudrückende Gröfsen. Wir können aber nur mit unbenannten Zahlen rechnen, und dürfen also unser Princip überhaupt nur dann erst in Anwendung bringen, wenn wir vorher die concreten Gröfsen v_1; v_2; v_3; .... mit anderen concreten Gröfsen, die ihnen als Einheiten zum Grunde liegen, dividirt und somit auf unbenannte Zahlen zurückgeführt haben. Wir wollen diese concreten Einheiten einstweilen unbestimmt mit m_1; m_2; m_3 ... bezeichnen.

Es heifst also unser Princip in dieser vollständigeren und richtigeren Form eigentlich so: Es soll die Zahl $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ ein Minimum werden; und handelt es sich also jedesmal vor Anwendung desselben um eine Festsetzung über die m, oder doch wenigstens über das Verhältnifs der m, d. h. der Zahlen, worin die m ausgedrückt sind; denn es ist klar, dafs wenn z eine beliebige unveränderliche unbenannte Zahl bezeichnet, auch die Grössen zm_1; zm_2; zm_3 ... dazu dienen können einestheils die v_1; v_2; v_3 ... in unbe-

nannte Zahlen zu verwandeln, und anderntheils die Zahl $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ zu einem Minimum zu machen, indem die Zahl $\left[\frac{vv}{zz\,mm}\right] = \frac{1}{zz}\left[\frac{vv}{mm}\right]$ sich von jener nur durch den constanten Factor $\frac{1}{zz}$ unterscheidet.

Sind nun die Beobachtungen, die wir auszugleichen haben, von gleicher Gattung und Beschaffenheit, und dies ist der gewöhnlichste Fall, so ist $m_1 = m_2 = m_3 \ldots$. zu setzen und somit brauchen wir blofs bei den einzelnen v die Benennungen wegzulassen, um unser Princip in seiner ersten abgekürzten Form unmittelbar anzuwenden, wie es z. B. §. 7. geschehen ist.

Sind aber die Beobachtungen zwar von einerlei Gattung, aber von verschiedener Beschaffenheit, oder sind sie gar auch von verschiedener Gattung, so mufs erst eine besondere Untersuchung und Feststellung vorausgehen, um aus anderweiter Sachkenntnifs die m oder deren Verhältnifs zu ermitteln, ehe wir anfangen können, nach unserem Princip zu rechnen; eben so wie bei jeder anderen Rechnung mit benannten Zahlen eine vorläufige Sachkenntnifs der Rechnungs-Operationen vorausgehen mufs.

Zu solcher Sachkenntnifs können nun freilich auch wieder nur Arbeiten führen, die erst im Folgenden abzuhandeln sind. Vorläufig wird es aber hier wohl zweckmäfsig seyn anzumerken, dafs man unter den m die mittleren oder zu befürchtenden Fehler (*errores medios metuendos*) der einzelnen Beobachtungen zu verstehen hat, die bei verschiedener Beschaffenheit (Genauigkeit) der Beobachtungen von verschiedener Gröfse, bei verschiedener Gattung der Beobachtungen aber auch selbst von verschiedener Gattung sind.

Wir kommen, wie gesagt, weiterhin auf diese Materie

zurück, wollen aber doch schon hier das eben bemerkte durch vorläufige Beispiele zu erläutern suchen. Messen wir also z. B. einen Winkel mit einem bestimmten Theodolithen, so müssen wir aus schon gemachten früheren Erfahrungen beurtheilen können, welchen Fehler wir im Mittel bei jeder solchen Messung zu befürchten haben. Gesetzt dieser Fehler betrage $m = 10''$. Läge nun eine Anzahl Beobachtungen mit demselben Theodolithen und unter denselben Umständen zur Ausgleichung vor, und wollten wir die v als in Secunden ausgedrückt denken, so müfste eigentlich die Zahl $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ ein Minimum werden; diesen Zweck erreichen wir aber auch, wenn wir blofs die Benennung „Secunde" wegdenken und die Zahl $[vv]$ ein Minimum werden lassen. Hier waren also die Beobachtungen von gleicher Gattung und Beschaffenheit, und darin liegt unsere Berechtigung die Rechnung so zu führen, wie §. 7. im ersten Beispiel geschehen ist.

Gesetzt nun wir hätten einen zweiten Theodolithen, bei welchem wir $m = 5''$ aus vorläufiger Sachkenntnifs setzen müfsten; so würden nun Beobachtungen mit ihm allein gemacht, auch eben so behandelt werden können und müssen. Wären aber z. B. vier Beobachtungen o_1; o_2; o_3; o_4 desselben Winkels O auszugleichen, deren beide ersten mit dem ersten Theodolithen, die beiden letzten aber mit dem zweiten Theodolithen gemacht wären, so wären die Beobachtungen zwar noch von gleicher Gattung aber nicht mehr von gleicher Beschaffenheit, also dürften wir nicht mehr so rechnen wie im §. 7., sondern hätten die Zahl

$$\left[\frac{vv}{mm}\right] = \frac{v_1 v_1}{100} + \frac{v_2 v_2}{100} + \frac{v_3 v_3}{25} + \frac{v_4 v_4}{25}$$

zu einem Minimum zu machen, erreichten aber auch denselben Zweck, wenn wir für

$$100\left[\frac{vv}{mm}\right] = v_1v_1 + v_2v_2 + 4v_3v_3 + 4v_4v_4$$

den kleinsten Werth suchten, indem das obige $z = \frac{1}{10}$ gesetzt wird.

Gesetzt aber endlich es läge ein System von vier Beobachtungen o_1; o_2; o_3; o_4 vor, deren beide erste Winkelgröfsen, gemessen mit dem ersten Theodolithen, die beiden letzten dagegen Linien, gemessen mit irgend einem uns wohl bekannten Maafsstab, wären; so wäre nun auch die Gattung der m verschieden. Wir müfsten nun also zunächst die Kenntnifs des m_3 und m_4 für den Maafsstab und seine jedesmalige Anwendung uns verschaffen, wobei es wohl seyn könnte, dafs nicht $m_3 = m_4$ wäre, indem möglicher Weise diese m nicht blofs vom Maafsstabe sondern auch von der Gröfse der gemessenen Linien selbst abhängig wären. Sey also z. B. indem wir die den Linienmessungen zugehörigen v in Millimetern ausgedrückt denken, $m_3 = 2^{mm}$; $m_4 = 5^{mm}$; so wäre die Zahl

$$\left[\frac{vv}{mm}\right] = \frac{v_1v_1}{100} + \frac{v_2v_2}{100} + \frac{v_3v_3}{4} + \frac{v_4v_4}{25}$$

zu einem Kleinsten zu machen; was wir auch erlangen, wenn wir für die Zahl

$$100\left[\frac{vv}{mm}\right] = v_1v_1 + v_2v_2 + 25v_3v_3 + 4v_4v_4$$

das Minimum suchen.

Die hier als unerläfslich dargestellte Sachkenntnifs, welche der Ausgleichung immer voraus gehen mufs, kann nun freilich zuweilen nur noch unvollständig und genähert seyn. Wenn sie nur nicht ganz fehlt, so können wir uns dann doch dadurch noch helfen, dafs wir das indirecte Verfahren einschlagen, was uns ohnehin in der practischen Geometrie geläufig geworden, indem wir erst unsere Rechnungen mit genäherten oder überschläglich geschätzten Wer-

hen der m durchführen, dadurch genauere Werthe der m erhalten (wozu im Folgenden die Regeln vorkommen werden), mit diesen die Rechnung wiederholen u. s. w.

§. 9.

Nachdem wir nun in den vorhergehenden Paragraphen uns erst sicher gestellt haben, dafs wir uns über die Natur unserer Aufgabe und ihres Princips richtig verstehen, so müssen wir nun unsere Berechtigung zu Aufstellung des Princips selbst noch weiter erörtern.

Um den Anfang dieses Jahrhunderts wurde bei Gelegenheit complicirter astronomischer Aufgaben unser Princip zuerst als solches angewendet, um aus Beobachtungen, die in überschüssiger Anzahl vorhanden waren, ein möglichst sicheres Resultat zu ziehen, und unter dem Namen: Methode der kleinsten Quadrate bekannt gemacht. Gleich nach oder mit den ersten Anwendungen hatte aber schon der Gedanke, dafs da, wo uns keine Kenntnifs der Wahrheit selbst möglich ist, statt derselben dasjenige auszumitteln ist, was die gröfste Wahrscheinlichkeit für sich hat, zu der Untersuchung geführt: wie die Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf vorhandene, mit unvermeidlichen Fehlern behaftete, Beobachtungen anzuwenden sey? Diese Untersuchung ging davon aus, dafs zur Auffindung derjenigen Werthe, welche streng genommen die wahrscheinlichsten genannt zu werden verdienen, das Gesetz bekannt seyn müfste, nach welchem die Gröfse eines unvermeidlichen Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit, ihn zu begehen, zusammenhängt. Sie ergab aber ferner, dafs man für dieses unbekannte Gesetz eine Hypothese aufstellen könne, welche sehr viel Wahrscheinlichkeit für sich hat. Nimmt man aber diese Hypothese an, und stellt man ferner als

Axiom den Satz auf: das arithmetische Mittel zwischen verschiedenen unmittelbaren Beobachtungen einer und derselben Gröfse giebt deren wahrscheinlichsten Werth; so gelangt man gleich dazu, auch diejenigen gesuchten Werthe für die wahrscheinlichsten zu halten, welche nach unserem Princip bestimmt sind.

Es zeigte sich also dabei, dafs einige Willkühr in der Annahme des Princips nothwendig zurückbleibt,*) und dies ist einer von den Gründen, weſshalb wir es unserem gegenwärtigen, auf die Praxis gerichteten, Zweck angemessen gehalten haben, die höchst scharfsinnigen Untersuchungen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung nur historisch anzuführen und einem besonderen Studium zu überlassen, unseren dermaligen Arbeiten aber das Princip als solches ohne Weiteres zum Grunde zu legen.

Im §. 7. haben wir nun schon beiläufig an einem Beispiele gesehen, wie unser Princip auf das arithmetische Mittel zurückführt. Dadurch empfiehlt sich dasselbe schon als übereinstimmend mit einer Verfahrungsweise, die wir von jeher in besonderen Fällen zur Annäherung an die Wahrheit zu gebrauchen gewohnt sind. — Eine weitere Empfehlung finden wir darin, dafs wir nach der Natur der zufälligen Fehler die positiven für eben so leicht möglich halten müssen, als die negativen; und dafs nun nach unserem Princip, welches die Zeichenverschiedenheit auf die einfachste Weise beseitigt, ihnen auch ganz gleiches Recht widerfährt.

Diese Beseitigung der Zeichen allein würde zwar auch

---

*) Quod si quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente necessitate, electam esse obiiciat, lubenter assentiemur. Quippe quaestio haec per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circumscribi nisi per principium aliquatenus arbitrarium nequit. *Gaufs Theoria combinationis observationum* etc. §. 6.

rreicht, wenn man jede beliebige gerade Potenz statt des Quadrates zur Grundlage eines solchen Princips machen vollte; oder wenn man auch ungerade Potenzen, worunter lann natürlich die erste die einfachste wäre, zum Grunde egte, nachdem man vorher alle negativen Zeichen in positive zu verwandeln, d. h. nur die absolute Gröfse der Fehler zu berücksichtigen, beschlossen hätte. Abgesehen aber lavon, dafs dieses letzte auch eine Willkühr wäre, welche ielleicht sich noch weniger rechtfertigen lassen möchte, als lie, welche bei Annahme unseres Princips als solches noch ibrig bleibt; lehrt nun auch noch die Wahrscheinlichkeits-Rechnung, dafs wir bei Zugrundlegung der Quadrate den vahrscheinlichen Fehler des Resultates in engere Gränzen einschliefsen als bei irgend einer der anderen sechs ersten Potenzen.

Wir können uns für unsere practischen Zwecke also vollkommen bei unserem Princip beruhigen und jetzt zu den Anwendungen schreiten.

§. 10.

Für die Aufgaben nun, bei welchen die Ausgleichungs-Rechnung angewandt wird, lassen sich vom practischen Gesichtspunkte aus drei verschiedene Fälle unterscheiden, deren jeder ein anderes Verfahren erfordert. Wir wollen diese Fälle vorerst hier aufzählen.

Erster Fall: Die gesuchten Gröfsen sind unabhängig von einander, und werden unmittelbar beobachtet.

Zweiter Fall: Die gesuchten Gröfsen sind zwar auch unabhängig von einander, sie können aber nicht unmittelbar beobachtet werden, sondern es werden statt ihrer andere Gröfsen beobachtet, welche mit ihnen in einem bekannten Zusammenhange stehen.

Dritter Fall: Die gesuchten Gröfsen werden wieder unmittelbar beobachtet; sie sind aber nicht unabhängig von einander, sondern es bestehen zwischen ihnen Bedingungen, welche immer nothwendig erfüllt seyn müssen.

Wir wollen diesen Unterschied nun weiter entwickeln und durch Beispiele erläutern, unsere drei Fälle aber erst zur Abkürzung durch Einführung besonderer Benennungen unterscheiden. Wir nennen also in Zukunft die in überschüssiger Anzahl vorhandenen Beobachtungen (welche als Beobachtungen natürlich immer unabhängig von einander angestellt seyn müssen), direct oder vermittelnd oder bedingt, je nachdem sie zunächst auf eine Aufgabe des ersten, zweiten oder dritten Falles führen.

Beispiele von directen Beobachtungen haben wir schon gelegentlich oben in §. 7. gesehen. Wir haben ein solches Beispiel natürlich überall, wo nur eine selbstständige Gröfse durch unmittelbare Beobachtungen festzustellen ist; und deshalb bleibt auch dies der bei weitem am häufigsten vorkommende Fall. — Der durch die Ausgleichung zu hebende Widerspruch besteht, wenn nur eine Beobachtungs-Gröfse vorhanden ist, immer darin, dafs die Zahlen-Werthe der einzelnen Beobachtungen nicht gleich sind. Sind aber mehrere Beobachtungsgröfsen zu bestimmen, so hat man so viel Widersprüche dieser Art auszugleichen, als Beobachtungsgröfsen vorliegen.

Vermittelnde Beobachtungen geben uns Kenntnifs von Beobachtungs-Gröfsen O_1; O_2; O_3 .... die noch nicht das sind, was wir eigentlich suchen. Die gesuchten Gröfsen selbst, welche mit E_1; E_2; E_3 .... bezeichnet werden mögen, nennen wir die Elemente der Beobachtungen. Wir haben also nach dem Obigen vorauszusetzen, dafs Gleichungen zwischen den E und O bestehen und ge-

geben sind. Bezeichnen wir nun die Zahl der gesuchten Elemente mit z_e, die Zahl der vorhandenen Beobachtungen o_1; o_2; o_3 .... mit z_o, so bedürfen wir, um die z_e Elemente zu finden, im Allgemeinen auch z_e Gleichungen, also z_e Beobachtungen.. Unsere Voraussetzung, dafs die Beobachtungen in überschüssiger Anzahl vorhanden seyen, schliefst also die Voraussetzung ein, dafs $z_o > z_e$ sey. Der durch die Ausgleichung zu entfernende Widerspruch wird sich dadurch zeigen, dafs wenn wir von den vorhandenen, mit kleinen Fehlern behafteten, Beobachtungen eine Anzahl $(z_o - z_e)$ weglassen, und aus den übrigen z_e ein System von Elementen vermittelst der gegebenen Gleichungen bestimmen, dieses Elementen-System nicht genau die früher weggelassenen Beobachtungen wieder darstellt. Wir würden vielmehr so viele verschiedene Elementen-Systeme aus den Beobachtungen ableiten können, als wir Combinationen von z_e Beobachtungen aus den vorhandenen z_o willkührlich auslesen könnten. Demnach müssen wir durch die Ausgleichung ein Elementensystem suchen, welches für alle Beobachtungs-Gröfsen die Werthe $o_1 + v_1$; $o_2 + v_2$; $o_3 + v_3$ u. s. w. mit der Bestimmung giebt, dafs $[vv]$ ein Minimum werde.

Beispiele solcher vermittelnden Beobachtungen kommen vorzüglich oft in der Astronomie vor, und haben auch die Veranlassung zu allen diesen Untersuchungen gegeben. Eben so sind auch Aufgaben dieser Art in der Physik schon öfters vorgekommen. Aber auch in der practischen Geometrie fehlt es nicht an ihnen. Dahin gehört z. B. der Fall des Horizont-Abschlusses, wo wir auf einer trigonometrischen Station mehr Winkel messen als zur Bestimmung der gegenseitigen Richtungen unserer Gesichts-Linien unmittelbar nöthig sind. Haben wir z. B. die 4 Punkte A, B,

C, *D* vor uns, so können wir die Winkel *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* messen. Die Richtungen der Gesichts-Linien aber, welche wir aus drei solchen Winkeln berechnen, werden verschieden ausfallen, je nachdem wir die Combination *AB*, *AC*, *AD*, oder eine andere z. B. *AB*, *BC*, *CD* zur Berechnung gebrauchen; und wir müssen also die gemessenen Winkel darnach ausgleichen.

Ferner kann bei Anwendung der Pothenotschen Aufgabe ein solcher Fall vorkommen. Sollte z. B. unser Standpunkt durch rechtwinklige Coordinaten x und y bestimmt werden, so gebrauchen wir bekanntlich nothwendig drei schicklich liegende durch (als fehlerfrei vorausgesetzte) Coordinaten bestimmte Punkte zu Messung zweier Winkel, welche o_1 und o_2 heifsen mögen. Gesetzt nun aber es seyen mehr als drei z. B. vier Punkte gegeben, so wären drei Winkel o_1; o_2 und o_3 zwischen ihnen durch unabhängige Messungen zu bestimmen. Diese Winkel haben aber keinen selbstständigen Zweck, sondern vermitteln nur die Kenntnifs der beiden gesuchten Elemente $E_1 = x$ und $E_2 = y$. Wir kennen nun den Zusammenhang zwischen den E und O und wissen also die E zu berechnen, wenn wir beliebige zwei Winkel dazu benutzen. Dies Geschäft können wir aber in unserem vorliegenden Beispiel auf dreierlei Weise ausführen, indem wir o_1 und o_2; oder o_1 und o_3; oder o_2 und o_3 allein benutzen. Wir werden also drei verschiedene Elementensysteme aus unseren Beobachtungen finden können, deren jedes die beiden Beobachtungen, welche wir zum Grunde legten, genau darstellt, bei der dritten aber eine Abweichung und somit einen Widerspruch zeigt. Die Ausgleichung führt uns dann zur Kenntnifs derjenigen Coordinaten x und y, welche wir für die wahren zu nehmen haben, weil sie nach den vorliegenden Umständen die wahr-

cheinlichsten sind, indem sie o_1+v_1; o_2+v_2; o_3+v_3 genau darstellen und für $[vv]$ den möglichst kleinsten Werth geben.

Bedingte Beobachtungen kommen in der practischen Geometrie besonders häufig vor. Die beobachteten Gröfsen haben dann irgend einen selbstständigen Zweck; wir wissen aber, dafs zwischen den O ein nothwendiger Zusammenhang besteht, und haben also, sobald überschüssige Beobachtungen vorhanden sind, einen Widerspruch oder mehrere Widersprüche zu erwarten. Denn die Bedingungen, welche aus diesem Zusammenhange folgen, (ihre Anzahl heifse z_b) werden bei den in überschüssiger Anzahl vorhandenen nicht genau erfüllt seyn. Wir müssen also erst die Verbesserungen v dazu aufsuchen, damit die verbesserten Beobachtungen $o+v$ mit den Bedingungen übeinstimmend oder unter sich verträglich werden. Hier ist zwar $[vv]$ auch zu einem Minimum zu machen, aber dies Minimum ist selbst bedingt, indem nur solche v zulässig sind, welche machen, dafs die $o+v$ den z_b Bedingungen entsprechen.

Wollen wir z. B. die Winkel eines Dreiecks bestimmen, so müssen wir nothwendig zwei derselben unmittelbar messen. Messen wir aber alle drei, so sind an die o solche v anzubringen, dafs o_1+v_1; o_2+v_2; o_3+v_3 die bekannte Summe geben, und unter dieser Bedingung $[vv]$ ein Minimum werde. Es ist hier also $z_b=1$.

Messen wir in einem Vierecke die vier Seiten und beide Diagonalen, so sind für die gemessenen Linien solche v zu suchen, dafs jedes einzelne $o+v$ gleich wird dem Werthe, welcher sich aus den fünf übrigen $o+v$ nach den bekannten trigonometrischen Regeln berechnen läfst. Auch hier ist $z_b=1$. Geometrisch liefse sich diese Bedingung so auffassen: Die Linien müssen sich zu je drei wirklich in Punk-

ten schneiden, und nirgends etwa statt des Punktes ein Dreieck darstellen, das dem fehlerzeigenden Dreiecke der Pothenotschen Aufgabe analog wäre.

Messen wir ferner in einem Polygon von p Seiten alle Winkel und alle Seiten, so sind bekanntlich drei überschüssige Stücke gemessen. Demnach müssen die v (welche hier also verschiedener Gattung sind, indem sie theils Winkel theils Linien-Gröfsen bedeuten) so bestimmt werden, dafs jede beliebige drei Stücke z. B. $o_1 + v_1$; $o_2 + v_2$; $o_3 + v_3$ eben so ausfallen, wie sie ausfallen würden, wenn wir sie aus den $p - 3$ übrigen Stücken $o_4 + v_4$; $o_5 + v_5$ u. s. w. nach den bekannten Regeln berechneten. Hier ist $z_b = 3$.

Diese Beispiele werden genügen um die aufgestellte Unterscheidung der drei Fälle zu erläutern. Wir müssen nun aber, damit wir uns gewifs richtig verstehen, noch einiges bemerken. Unsere Unterscheidung besagt nämlich **nicht**, dafs die Fälle ihrem inneren **Wesen** nach verschieden seyen, so dafs nicht gemeinschaftliche Gesichtspunkte für dieselben aufgefunden werden könnten, und besagt auch **nicht**, dafs nicht unter Umständen bei einer und derselben Aufgabe mehrere dieser Fälle oder alle drei mit einander vorkommen könnten. — Was das erste betrifft, so sehen wir leicht ein, dafs directe Beobachtungen als vermittelnde mit einem Element betrachtet werden können; und eben so wird es uns gleich beifallen, dafs wir bei bedingten Beobachtungen, $z_o - z_b$ Beobachtungen als Elemente betrachten können, aus welchen die z_b übrigen Beobachtungen sich ergeben müssen. — Was aber das zweite anbelangt, so wollen wir lieber gleich ein Beispiel beifügen, worin alle drei Fälle vorkommen. Gesetzt also in einem Viereck $ABCD$, worin wir **eine** Seite als gegeben betrachten, hätten wir uns in A, B, C aber nicht in D auf-

estellt, und überall die drei vorhandenen Winkel (also . B. *ABD*, *ABC*, *DBC*) und zwar jeden durch zehnma-ige Repitition gemessen. Da gäbe denn die Repetition zu-rst Veranlassung zu neunmaliger Anwendung der ersten ufgabe; der Horizont-Abschluſs, der auf jeder Station öthig würde, verlangte dreimalige Anwendung der zwei-en Aufgabe; und nun hätten wir noch die beiden Bedin-ungen zu erfüllen, daſs die Summe der Winkel des Drei-cks *ABC* auf 180° schlieſse, und daſs das Verhältniſs je-er zwei beliebigen Linien z. B. $\frac{BD}{AC}$ immer durch dieselbe ahl ausgedrückt werde, welche von den Winkeln wir auch u seiner Berechnung anwenden mögen.

Wir befolgten bei Aufstellung unserer Unterscheidung ielmehr bloſs die Rücksicht, daſs, um in zusammengesetz-eren Fällen nicht den Faden zu verlieren, vor Allem nö-hig ist, sich die einfacheren Fälle erst allein gründlich ein-uprägen. Wir wollen deshalb jeden dieser Fälle nun al-ein in einem besonderen Abschnitte vornehmen, und uns den orhandenen Stoff nach Kapiteln, Paragraphen und Num-nern disponiren, worauf wir uns in der Folge beziehen önnen.

In jedem dieser Abschnitte wollen wir zuerst solche eobachtungen voraussetzen, die gleich genau sind, d. h. ei welchen kein Grund vorliegt gröſsere Fehler bei der ei-en als bei der anderen zum Voraus zu befürchten; sodann ollen wir zu Beobachtungen von verschiedener Genauig-eit übergehen, und zugleich immer alles das beifügen, wo-u die Betrachtung des besonderen Falles unmittelbar Veran-assung giebt.

Für Leser, welche beabsichtigen die Methode der kleinste Quadrate aus den Quellen selbst zu studiren, sey noch folgende bemerkt.

Die erste Schrift, in welcher eine Anwendung der Methode ver öffentlicht wurde, ist:

Legendre, Nouvelles methodes pour la determination des or bites des comètes. Paris 1806.

Die Entwickelung und Ausbildung findet sich in:

Gauſs, Theoria motus corporum coelestium. 1809. Lib. II Sect. II

Gauſs, Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. 1811.

Gauſs, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. (*v. Lin denau und Bohnenberger* Zeitschrift. 1816. I. S. 185.)

Gauſs, Theoria combinationis observationum erroribus minimi obnoxiae. 1823.

Gauſs, Supplementum theoriae combinationis etc. 1826.

Eine Zusammenstellung dieser Lehren, mit Rücksicht auf Ar beiten von Bessel und Hansen, giebt:

Encke, Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. (*Berline astronom. Jahrbuch* 1834. 1835. 1836.)

Erster Abschnitt.

Ausgleichung directer Beobachtungen.

Erstes Kapitel.

Directe Beobachungen von gleicher Genauigkeit.

§. 11.

Bei directen Beobachtungen sind die Beobachtungs-Grösen O unabhängig von einander und unmittelbar beobachet. Hieraus geht hervor, dafs wir jede einzelne von ihnen hne Rücksicht auf die übrigen bestimmen können. Demach haben wir, wie viele Beobachtungs-Gröfsen auch voriegen mögen, immer nur eine nach der anderen in beliebier Folge zu bestimmen und können also, ohne der Allgeeinheit im Mindesten Abbruch zu thun, uns darauf bechränken, die Ausgleichung der Beobachtungen einer inzigen Beobachtungs-Gröfse O zu studiren.

§. 12.

Wir haben nun schon oben §. 7. an dem ersten Beipiele gesehen, wie das Princip der kleinsten Quadratumme auf das arithmetische Mittel führt, und wol-

len dies hier nicht wiederholen, sondern statt dessen nur in Beziehung auf den §. 8., daran erinnern, dafs wir das Princip hier, wo nothwendig Beobachtungen von gleicher Gattung vorliegen, die als gleich genau vorausgesetzt werden, ohne Weiteres anwenden können, wenn wir uns die zu findenden v als unbenannte Zahlen denken, indem wir überall nur die Benennungen weglassen.

Nehmen wir also aus den vorhandenen Beobachtungen o_1; o_2; o_3 . . . ., deren Anzahl wir fortwährend mit z_o bezeichnen wollen, das arithmetische Mittel M, so haben wir zu machen

$$\text{n. 1.} \quad M = \frac{[o]}{z_o}$$

und alsdann $M = O$ zu setzen; womit wir also nach dem Vorhergehenden nicht sagen wollen, dafs nun M der wirkliche wahre Werth der Beobachtungsgröfse sey, sondern nur, dafs wir diesen Werth M für das wahre O nehmen müssen, weil er nach den vorliegenden Umständen der wahrscheinlichste ist.

Setzen wir nun unsere Verbesserungen darnach fest, so finden wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} v_1 &= M - o_1 \\ v_2 &= M - o_2 \\ v_3 &= M - o_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Addiren wir diese Gröfsen, so ergiebt sich

$$[v] = z_o M - [o] = z_o \frac{[o]}{z_o} - [o]$$

also am Ende

$$\text{n. 2.} \quad [v] = 0$$

und demnach die erste characteristische Eigenschaft der durch das Mittel ausgeglichenen Beobachtungen: dafs die algebraische Summe der Verbesserungen $= 0$ seyn mufs,

der dafs die positiven und negativen Verbesserungen sich nter einander aufheben.

§. 13.

Bilden wir die Quadrate der Verbesserungen, so ergiebt sich

$$v_1 v_1 = (M - o_1)^2$$
$$v_2 v_2 = (M - o_2)^2$$
$$v_3 v_3 = (M - o_3)^2 \text{ u. s. w.}$$

Addiren wir auch hier, so kommt

$$\text{n. 3.} \quad [vv] = z_o MM - 2[o]M + [oo]$$

und wenn wir hier wieder eben so wie im vorigen §. den Werth für M aus n. 1 setzen,

$$\text{n. 4.} \quad [vv] = [oo] - \frac{[o]^2}{z_o}.$$

Nach dieser Formel könnten wir also, wenn irgend ein Grund dazu vorläge, unser $[vv]$ unmittelbar aus den Beobachtungen berechnen, ohne das arithmetische Mittel selbst dazu zu benutzen, selbst ohne die einzelnen v zu berechnen.

Hätten wir z. B. etwa bei einer Winkelmessung für $z_o = 10$ in den Secunden folgende Werthe von o gefunden, denen wir ihre oo gleich beischreiben wollen:

Ordnungszahl	o	oo
1	12	144
2	14	196
3	13	169
4	15	225
5	16	256
6	13	169
7	14	196
8	15	225
9	13	169
10	14	196
	$[o] = 139$	$[oo] = 1945$

so wäre $[o]^2 = 19321$; $\frac{[o]^2}{10} = 1932{,}1$; $[vv] = 12{,}9$;

ganz dasselbe erhalten wir aber, wenn wir das Mittel $M = 13{,}9$ bestimmen und dann unser $[vv]$ nach n. 3. berechnen, oder wenn wir erst die einzelnen v nach dem vorigen §. aufsuchen, quadriren und addiren. — In der Praxis ist uns freilich in der Regel neben dem $[vv]$ auch die Kenntnifs der einzelnen v nöthig, und deshalb die letzterwähnte Weise die natürlichste und bequemste.

§. 14.

Wählen wir irgend einen beliebigen anderen Werth W statt des arithmetischen Mittels M, um die Beobachtungen damit zu vergleichen, und setzen

$$u_1 = W - o_1$$
$$u_2 = W - o_2$$
$$u_3 = W - o_3 \text{ u. s. w.}$$

so wird $[uu] = z_o WW - 2[o]W + [oo]$ oder, wenn wir den Werth von $[oo]$ aus n. 4 substituiren,

$$[uu] = [vv] + z_o WW - 2[o]W + \frac{[o]^2}{z_o} = [vv] + \frac{(z_o W - [o])^2}{z_o}$$

oder endlich, durch Einführung von n. 1,

n. 5. $$[uu] = [vv] + z_o (W - M)^2.$$

Da hier das letzte Glied immer positiv und also immer $[uu] > [vv]$ ist, so sehen wir hier aus einem anderen Gesichtspunkte die zweite characteristische Eigenschaft des arithmetischen Mittels, welche sich dahin ausspricht: M ist derjenige Werth, welcher für O genommen, den o die möglichst kleine Quadratsumme der Fehler zuschreibt. Wir werden also hier auf unser Princip zurückgeführt, wenn wir

auch, ohne dasselbe zu kennen, das arithmetische Mittel ohne Weiteres für O gesetzt hätten.

§. 15.

Die Kenntnifs unseres $[vv]$ mufs uns nun zu einer Beurtheilung der Genauigkeit der Beobachtungen verhelfen können. Vorläufig sehen wir schon ein, dafs zwei verschiedene Gruppen von gleich vielen unter sich gleich genauen Beobachtungen desselben O, welche gleiche M und $[vv]$ hätten, von uns für gleich genau gehalten werden würden, wenn auch die einzelnen v in der einen Gruppe ganz anders beschaffen wären als in der anderen. Denken wir uns also neben unseren wirklich vorhandenen Beobachtungen eine zweite Gruppe von fingirten Beobachtungen, die dasselbe M gäben und dasselbe $[vv]$ hätten, und setzen wir voraus, diese fingirten Beobachtungen hätten die Beschaffenheit, dafs $v_1 v_1 = v_2 v_2 = v_3 v_3$ u. s. w., so würden wir zwar den fingirten Beobachtungen im Allgemeinen noch dieselbe Genauigkeit zuschreiben, die den wirklichen zukommt, jeder einzelnen fingirten würde aber eine gleiche Verbesserung zukommen, die wir mit δ bezeichnen wollen. Wir hätten also $z_0 . \delta\delta = [vv]$ zu setzen, oder

$$\text{n. 6.} \qquad \delta = \sqrt{\frac{[vv]}{z_0}}.$$

Die so berechnete Gröfse δ nennen wir die mittlere Abweichung unserer wirklichen Beobachtungen vom Mittel, weil wir daran erkennen, um wie viel wir jede einzelne ändern müfsten, wenn sie im Allgemeinen gleich genau bleiben und doch alle gleich viel geändert werden sollten.

Liegen uns nun zwei verschiedene Gruppen von wirklichen Beobachtungen vor, in welchen die O, z_0, M, und $[vv]$ verschieden seyn mögen, und berechnen wir beider-

seits die mittlere Abweichung, so werden wir schon vorläufig urtheilen können, dafs bei gleichem δ auch gleiche Genauigkeit in beiden Gruppen sey, dafs aber bei ungleichem δ in derjenigen Gruppe die gröfsere Genauigkeit statt finde, wo das kleinere δ erscheint.

§. 16.

Wir müssen aber noch einen Schritt weiter gehen. Nicht die mittlere Abweichung vom Mittel, sondern die mittlere Abweichung von der Wahrheit ist es eigentlich, die wir zu wissen begehren, um unsere Beobachtungen zu beurtheilen. Diese wollen wir den mittleren Fehler oder den zu befürchtenden Fehler nennen und vorerst mit m bezeichnen. — Die genaue Bestimmung unseres m erforderte also eigentlich, dafs wir das wahre O kennten. — Beobachten können wir nun zwar das O möglicherweise, denn es kann uns allerdings, wenn wir die Reihe der Beobachtungen hinlänglich ausdehnen, begegnen, dafs zufällig eine oder mehrere ganz fehlerfreie darunter seyen, aber das würde uns zu gar nichts helfen, weil wir durchaus kein Mittel besitzen, eine fehlerfreie Beobachtung als solche zu erkennen. — Wir müssen also darauf verzichten, das m genau zu bestimmen und uns mit einer möglichst angenäherten Schätzung begnügen. Hiezu haben wir die Mittel.

Die Erfahrung lehrt uns nämlich, dafs bei einiger Ausdehnung der Beobachtungs-Reihen, ja oft schon bei wenigen Beobachtungen, sich unter den o das M selbst, zuweilen sogar öfters zu finden pflegt. Kommt nun dieser Fall vor, so schreiben wir dem beobachteten M eben so wohl wie den übrigen o den mittleren Fehler m zu. Umgekehrt werden wir also auch, wenn wir uns zu den vorlie-

genden o eine fehlerfreie Beobachtung hinzudenken, die Abweichung dieses neu hinzugedachten o vom berechneten Mittel $= m$ setzen dürfen. — Das Hinzudenken der desiderirten fehlerfreien Beobachtung vermehrt also unser $[vv]$ um ein mm, verändert aber nichts an den vorhandenen Beobachtungen, und es mufs also die Summe $[vv] + mm$ auf letztere allein vertheilt werden.

Demnach haben wir $z_o\ mm = [vv] + mm$ zu setzen, d. h.

$$\text{n. 7.} \qquad m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_o - 1}}.$$

Ehe wir weiter gehen, wird es nützlich seyn noch einiges anzumerken.

Vorerst müssen wir dem Irrthume vorbeugen, als sey ein Widerspruch zwischen dieser letzten Gleichung und n. 5. Dies kann höchstens nur auf den ersten Blick so scheinen, indem man etwa glaubte, wenn man $W = O$ setze, so müsse man nicht nur $[uu] = z_o mm$ sondern auch $W - M = O - M$ setzen. Die letztere Substitution ist aber offenbar in n. 5 ganz unzulässig, indem nach dem Vorhergehenden $O - M$ nur dann $= m$ gesetzt werden kann, wenn man sich eine von beiden Gröfsen als beobachtet denkt; statt dafs sich n. 5 nur auf das nach n. 1 berechnete M bezieht. — Was aber für $O - M$ zu setzen sey, wenn die Fiction, dafs eine dieser Gröfsen beobachtet sey, wegfällt, wollen wir gleich im nächsten §. untersuchen.

Die Auffindung des m leistet uns nun den doppelten Nutzen, dafs wir erstlich daran sehen können, welcher Beschaffenheit unsere Beobachtungen waren, worauf wir noch zurückkommen werden, und sodann dafs wir dadurch einen genäherten Schlufs auf zukünftige Beobachtungen machen können. Fänden wir nämlich durch eine directe Beobach-

tung, die unter denselben Umständen, mit denselben Hülfs-Mitteln für ein anderes O angestellt wäre, ein einzelnes o, so würden wir $o \pm m$ als eine Angabe für die Gränze halten müssen, innerhalb welcher wir in Bestimmung dieses neuen O durch die unvermeidlichen Fehler gefährdet zu seyn glaubten, insofern nämlich ein Schluſs von der bisherigen Erfahrung, die das m geliefert hat, auf die Zukunft gemacht werden kann und soll. Die letztere Rücksicht spricht sich in der Benennung zu befürchtender Fehler, die erstere in der Benennung mittlerer Fehler aus.

Daſs dem m (eben so wie dem obigen δ) kein Zeichen zukommt, braucht wohl nach dem Vorhergehenden nicht erinnert zu werden. Deshalb ist es auch ganz gleichgültig, ob wir von mittlerem Fehler oder von mittlerer Verbesserung reden (vergl. §. 4). Ersteres ist nun einmal allgemein üblich und wir haben es deshalb beibehalten, obwohl uns andererseits, zumal für das erste Eingehen in diese Materie, zweckmäſsig schien, die Verbesserungen immer voranzustellen. Dieses Wort bringt nämlich den Begriff von Gröſsen mit sich, die wir nach gewissen Zwecken selbst absichtlich und planmäſsig machen, und die uns also genau bekannt sind; statt daſs die Fehler als solche gegen unseren Willen, unbewuſst und regellos von auſsen uns aufgedrungen werden, und uns deshalb immer selbst unbekannt bleiben, so daſs wir nur die genäherte Voraussetzung machen können, sie seyen unseren Verbesserungen an Gröſse gleich, und nur durch das Zeichen davon verschieden.

Aus den beiden Gleichungen n. 6 und n. 7 erhalten wir zunächst

$$\text{n. 8.} \qquad m = \delta \sqrt{\frac{z_0}{z_0 - 1}}.$$

woraus wir also ersehen, daſs zwar immer $m > \delta$, daſs aber

las δ sich dem m desto mehr nähert, je gröfser z_0. Wir halten uns also auch zu dem Ausdruck berechtigt: Der mittlere Fehler ist diejenige mittlere Abweichung vom Mittel, welche wir finden würden, wenn wir die Beobachtungen ins Unendliche fortsetzen könnten, das heifst mit anderen Worten also: könnten wir letzteres thun, so müfsten wir durch das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen den wahren Werth von O finden. — Dieser Ausdruck ist auch ganz analog unseren bisherigen Vorstellungen; denn da wir annehmen, dafs positive und negative Fehler gleich leicht vorfallen können (vgl. §. 9), so müssen wir auch annehmen, dafs wenn alle möglichen Fehler wirklich gemacht würden, jedem einzelnen ein anderer von derselben Gröfse aber entgegengesetztem Zeichen entspräche, der ihn aufhübe; statt dafs wir, bei der vorliegenden beschränkten Anzahl von wirklich vorhandenen Beobachtungen, nur erreichen können, dafs die von uns gemachten v, die wir aus Noth für die Fehler mit verinderten Zeichen halten müssen, sich nach n. 2 unter einander aufheben.

§. 17.

Wir haben nun zunächst zu untersuchen, welcher Fehler in unserem nach n. 1 berechneten arithmetischen Mittel zu befürchten ist, wenn wir in den einzelnen Beobachtungen den mittleren Fehler m befürchten. Bezeichnen wir diesen mittleren Fehler des arithmetischen Mittels mit μ, so müssen wir uns nach dem Vorhergehenden vorstellen, dafs wir, insofern wir blofs aus den vorhandenen Beobachtungen auf die Wahrheit schliefsen sollen, uns darauf gefafst halten müssen, dafs $O = M \pm \mu$ seyn könne, statt dafs wir blofs M dafür setzen.

Setzen wir aber in n. 5 nunmehr $M \pm \mu = O$ an die

Stelle von W, so müssen wir auch an die Stelle von $[uu]$ jetzt $z_0 mm$ setzen. Wir haben also zunächst zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$\text{n. 9.} \qquad z_0 mm = [vv] + z_0 \mu^2$$

die uns das verlangte μ aus m und $[vv]$ berechnen lehrt.

Wenden wir hierauf nun die Gleichung n. 7 an, um $[vv]$ zu eliminiren, so erhalten wir:

$$\text{n. 10.} \qquad \mu = \frac{m}{\sqrt{z_0}},$$

wodurch wir also den wichtigen Satz erkennen: dafs vermöge unseres Princips, welches die Verkleinerung des $[vv]$ zur Grundlage der Annäherung an die Wahrheit annimmt, unter übrigens gleichen Umständen die Beobachtungszahl im quadratischen Verhältnisse vermehrt werden mufs, wenn der zu befürchtende Fehler des arithmetischen Mittels im einfachen Verhältnisse vermindert werden soll.

Endlich erhalten wir noch aus n. 7 und n. 10

$$\text{n. 11.} \qquad \mu = \sqrt{\frac{[vv]}{z_0(z_0-1)}}$$

zur unmittelbaren Berechnung aus $[vv]$.

§. 18.

Wir bemerkten schon oben, dafs diese Untersuchungen uns zur Beurtheilung der Genauigkeit unserer Beobachtungen dienen sollten. Dies können wir auch jetzt klarer aussprechen. — Das Wort Genauigkeit bezeichnet nämlich immer einen relativen Begriff, den wir, um ihm eine mathematische Bedeutung zu geben, erst schärfer bestimmen müssen. Hierzu ist man nun übereingekommen, die Genauigkeit dem mittleren Fehler umgekehrt proportional zu setzen; so dafs man also, wenn z. B. die Be-

bachtungen einer gewissen Gruppe einen mittleren Fehler eigen, der doppelt so grofs ist, als der einer zweiten Gruppe, unmehr ohne Unbestimmtheit sagen kann: die Beobachtungen der zweiten Gruppe sind „doppelt so genau" als die ier ersten. — Eben so können wir nun auch nach Maafsgabe des vorigen Paragraphen mit Bestimmtheit den Satz ufstellen: die Genauigkeit des arithmetischen Mittels wächst vie die Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl.

Wir sagen deshalb auch, der mittlere Fehler bestimmt die Genauigkeit. Als Maafs der Genauigkeit (*mensura praecisionis*) könnte also jede Gröfse dienen, welche dem mittleren Fehler umgekehrt proportional st. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat auch eine solche Gröfse schon wirklich gewählt, und mit diesem Namen bezeichnet, mit welcher wir uns aber nach unserem Plane hier nicht weiter beschäftigen.

Nunmehr können wir auch erst die Voraussetzung als vollständig gerechtfertigt betrachten, welche wir am Anfange dieses Kapitels machten: Die Beobachtungen, die wir betrachten wollten, sollten von gleicher Genauigkeit seyn. Wir haben nämlich von vorn herein immer vorausgesetzt, dafs allen von uns beobachteten o ein und dasselbe m zukäme; wie solches mit unserer Vorbemerkung in §. 8. übereinstimmt.

Ferner können wir nun den §. 8. gemachten Vorbehalt als erledigt betrachten, wenigstens in sofern, als wir nun einen von den Wegen kennen, auf welchen man zur Kenntnifs der m gelangen kann, deren Verhältnifs vor Anwendung der Ausgleichungs-Rechnung bekannt seyn mufs. Sollten wir also die dort beispielsweise angeführten Beobachtungen mit den beiden verschiedenen Theodolithen weiter bearbeiten, ohne dafs uns die m schon bekannt wären, so müfsten

wir vorerst für jedes Instrument eine Beobachtungsreihe aufsuchen oder anstellen, worin ein und derselbe Winkel öfters repetirt wäre, um nach den eben vorgetragenen Regeln die mittleren Fehler darnach festzusetzen.

Es ist schon darauf hingedeutet, dafs man nach Umständen auch noch auf anderen Wegen zur Kenntnifs der m kommen kann; davon wird später die Rede seyn. Dagegen mag hier noch die Bemerkung Platz finden, dafs eine recht sorgfältige Bestimmung des mittleren Fehlers einer gewissen Gattung von Beobachtungen, blofs nach den bisherigen Regeln, schon an und für sich oft ein sehr nützliches Geschäft ist, durch dessen Uebernahme ein Practiker, der die Mühe nicht scheut eine grofse Anzahl von Wiederholungen einer und derselben Messung anzustellen und zu berechnen, sich ein wahres Verdienst erwerben kann. Denn in sehr vielen Fällen sind wir, selbst bei ganz gewöhnlichen Vorkommnissen, keineswegs auf dem Reinen über die m. Als Beispiel mag unsere gemeine Mefskette dienen, bei welcher wir noch nicht sicher wissen, ob und wie das m d. h. also die Genauigkeit unserer Kettenmessungen von der Länge der Kette und von der Länge der damit gemessenen Linien abhängt. Wenn in den Landmesser-Instructionen ein Fehler-Procent angegeben wird, welches bei den Ketten-Messungen gut gethan werden soll, so beruht das im Grunde auf der doppelten Voraussetzung: der mittlere Fehler sey von der Länge der Kette unabhängig und der Länge der gemessenen Linie proportional. — Entscheidende Thatsachen aber, welche diese Voraussetzungen sicher begründeten, sind mir wenigstens nicht bekannt. Ich glaube also, dafs ein Landmesser auf Anerkennung aller wissenschaftlichen Practiker zu rechnen hätte, wenn er etwa 5 verschiedene Linien, wie sie in der Praxis täglich vorkommen, also z. B. von 20 bis

00 Ruthen Länge, mit der zweiruthigen, dreiruthigen und
infruthigen Kette, jedesmal wenigstens 10 mal mäfse, (ver-
teht sich unter den jedem Practiker ohnehin bekannten Vor-
ichten, dafs die Messungen unabhängig von einander seyen),
lann durch Anwendung der Gleichungen n. 1 und n. 7 die
5 Werthe für m bestimmte, und diese Resultate mit den,
um Belege dienenden, Beobachtungen öffentlich bekannt
nachte.

§. 19.

Jetzt würde nur noch ein Rechnungs-Beispiel vorzu-
iehmen seyn. Es scheint aber angemessen, hier erst noch
ine Einschaltung zu machen, um wenigstens eine hi-
torische Nachricht von einigen Lehren der Wahrscheinlich-
eits-Rechnung zu geben, die mit diesen Gegenständen eng
usammenhängen, obgleich ein näheres Eingehen in diese
Art von Untersuchungen, wie schon erwähnt, ganz aufser
nserem Plane liegt.

Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung lehrt nämlich:

1) der mittlere Fehler m ist von dem wahrschein-
lichen Fehler (*error probabilis*) zu unterscheiden.
Unter letzterem, den wir mit r bezeichnen wollen, ver-
steht man aber eine Gröfse, die so bestimmt ist, dafs
sich bei einer Reihe von Beobachtungen wahrscheinlich
eben so viele Fehler finden, welche gröfser sind als r,
als sich deren finden, die kleiner sind als r; so dafs sich
also bei einer einzelnen Beobachtung Eins gegen Eins
wetten läfst, dafs der dabei begangene Fehler nicht grö-
fser sey als r. Die Gröfsen m und r stehen aber in ei-
nem constanten Verhältnisse, und es ist $r = 0{,}674489 \cdot m$,
wofür man in abgerundeter Zahl setzen kann $r = \frac{2}{3} m$.
2) Der wahrscheinliche Fehler des Mittels hängt mit

dem r eben so zusammen, wie unser μ mit dem m, und ist also $= \frac{r}{\sqrt{z_0 - 1}} = 0{,}674489 . \mu$ zu setzen.

3) Die Gränzen, innerhalb welcher die aus den Beobachtungen hergeleiteten m und r, so wie auch die daraus folgenden Fehler des Mittels zuverlässig sind, werden immer enger, je mehr die Anzahl der Beobachtungen zunimmt; und zwar kann man Eins gegen Eins wetten, dafs die wahren Werthe dieser vier Gröfsen jedesmal zwischen den beiden Werthen liegen, welche man erhält, wenn man sie mit $\left(1 \pm \frac{0{,}476936}{\sqrt{z_0}}\right)$ multiplicirt.

Diese hier bloſs historisch angeführten Sätze sind uns in sofern von Interesse, als wir daraus ersehen, dafs uns, wenn wir uns nach dem Obigen auf den Fehler m bei künftigen Beobachtungen gefafst halten, wenigstens keine Unvorsichtigkeit zur Last fällt; dafs wir aber, um zu sicheren Resultaten zu gelangen, mit Wiederholung der Beobachtungen ja nicht allzu sparsam seyn dürfen.

Das letztere erläutert unsere obige Bemerkung §. 16., dafs eine unendliche Anzahl von Beobachtungen dazu gehören würde, um das arithmetische Mittel der Beobachtungen für die Wahrheit selbst halten zu dürfen. Das erstere erläutert sich aus dem Umstande, dafs kleine Fehler leichter gemacht werden als grofse und also die Wahrscheinlichkeit auf Seite der kleineren liegt.

§. 20.

Zum Rechnungs-Beispiele wähle ich Messungen eines Winkels, welche mit einem Breithauptischen Theodolithen in meinem Auditorium von Zuhörern gemacht sind. Ich schreibe dabei columnenweise die v und vv gleich neben

ie o und trage deshalbige Bemerkungen nach. Auch setze ch natürlich hier voraus, dafs alle Beobachtungen gleich genau seyen. Demnach wird

rdnungs-Zahl.	o	v	vv
1	17°56'45",00	— 5",37	28,84
2	31,25	+ 8,38	70,22
3	42,50	— 2,87	8,24
4	45,00	— 5,37	28,84
5	37,50	+ 2,13	4,54
6	38,33	+ 1,30	1,69
7	27,50	+ 12,13	147,14
8	43,33	— 3,70	13,69
9	40,63	— 1,00	1,00
10	36,25	+ 3,38	11,42
11	42,50	— 2,87	8,24
12	39,17	+ 0,46	0,21
13	45,00	— 5,37	28,84
14	40,83	— 1,20	1,44
	$[o] = 554,79$	$+ 27,78$ $[vv] = 354,35$	
		$- 27,75$	

$$M = \frac{[o]}{14} = 39",63.$$

Wir haben also zuvörderst $M = 17°56'39",63$ für die wahre Gröfse des Winkels zu halten, insofern wir dessen Kenntnifs blofs aus diesen Beobachtungen schöpfen können.

Die Columne für v ist nun durch die Abziehung $M - o$ entstanden. Darunter sind die Summen der positiven v und der negativen v geschrieben. Diese Additionen nehmen wir nämlich vor, um die Rechnung für M und v zu prüfen, indem nach n. 2 diese Summen gleich seyn müssen. In unserem Beispiel ist nun $[v] = +0,03$ geworden; davon sehen wir aber gleich den Grund in der bei Berechnung von M vorgenommenen Abrundung der letzten Decimale, welche in $[o]$ gerade drei positive Einheiten dieser Stelle austrägt.

Die Berechnung der Columne für vv ist immer das müh-

samste (an sich freilich immer noch sehr leichte) Geschäft bei dieser Art Rechnungen. Man kann sich dazu der kleinen Logarithmentafeln bedienen ohne irgend etwas zu schreiben, als was oben steht, wenn man sich gewöhnt die Logarithmen von v zu verdoppeln ohne sie erst abzuschreiben, und das Doppelte so lange auswendig zu behalten, bis man die Zahl dazu gefunden und aufgeschrieben hat. Nach dieser Weise würden wir also z. B. für unsere oberste Zahl 5,37 den Logarithmus 0,72997 aufschlagen aber nicht aufschreiben; das doppelte davon 1,45994, welches wir auch nicht aufschreiben sondern gleich aufschlagen, liegt am nächsten bei 28,84 und dies schreiben wir denn auf. — Wir bemerken hier gelegentlich, dafs ein ähnlicher Kunstgriff anzuwenden steht, wenn wir, was uns späterhin öfters vorkommen wird, eine aufgeschriebene Zahl mit einer anderen multipliciren oder dividiren sollen, deren Logarithmus aufgeschrieben ist. Auch hier addiren oder subtrahiren wir die beiden Logarithmen, deren einer nur aufgeschlagen, nicht aufgeschrieben ist, und suchen zu der auswendig behaltenen Summe oder Differenz die Zahl gleich auf. Sehr leicht gewöhnen wir uns an diese nützlichen Kunstgriffe, da wir ohnehin schon gewohnt sind, das Addiren und Subtrahiren zweier Logarithmen sowie ihre Verdoppelung und Halbirung von der höchsten Ziffer anzufangen.

Will man aber die vv ohne Logarithmen berechnen, so bedient man sich am vortheilhaftesten der partiellen Quadrirung, also z. B. für unsere oberste Zahl:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 30 \\ 9 \\ 742 \\ 49 \\ \hline 28{,}84 \end{array}$$

Auch Quadrat-Tafeln, die etwa bei der Hand sind, ssen sich nach Umständen mit vielem Nutzen anwenden.

Aus dem $[vv]$ ist nun nach n. 7 und n. 11 weiter m und zu berechnen, etwa nach folgendem Schema:

$log.[vv] = 2{,}54943 \quad log.mm = 1{,}43549 \quad m = \pm 5'',22$
$\frac{1}{2} log.\ 13 = 8{,}88606 \quad log.\ \mu\mu = 0{,}28936 \quad \mu = \pm 1\ ,40$
$\frac{1}{2} log.\ 14 = 8{,}85387.$

Demnach befürchten wir also keinen gröfseren Fehler, ls dafs bei einer folgenden Beobachtung dieselbe mindestens 4″,41 und höchstens 44″,85 geben dürfte, und eben so für nser Mittel, dafs die wahre Gröfse des gemessenen Win- els mindestens 38″,23 und höchstens 41″,03 seyn möchte. Vir könnten ferner nach §. 18 behaupten, dafs unser Mittel $\sqrt{14}$ mal d. h. nahe $3\frac{3}{4}$ mal so genau sey, als eine einzelne Beobachtung.

Wollten wir aber wetten, so müfsten wir, nach den 1 §. 19. aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung entlehnten ätzen, um unserem Gegner nicht Unrecht zu thun, die ränzen noch enger ziehen, indem wir zu den oben nicht auf- eschriebenen Logarithmen von m und μ erst noch 9,82898 ddirten. So erhielten wir die beiden Zahlen $\pm 3{,}52$ und $= 0{,}94$ und dürften nun Eins gegen Eins wetten, dafs eine olgende Beobachtung zwischen 36″,11 und 43″,15, so wie, afs der wahre Werth zwischen 38″,69 und 40″,57 läge. — ollte endlich eine Wette Eins gegen Eins auf die Sicherheit nserer m und μ eingegangen werden, so hätten wir sie nach . 19. erst noch mit $\frac{0{,}476936}{\sqrt{14}}$ zu multipliciren und erhielten o: $\pm$ 0″,67 und $\pm$ 0,18 d. h. wir könnten wetten, dafs m icht kleiner als 4″,55 und nicht gröfser als 5″,89; so wie afs μ nicht kleiner als 1″,22 und nicht gröfser als 1″,58 ist.

Doch diese Art von Untersuchungen bleiben wie gesagt vo unseren ferneren Betrachtungen ausgeschlossen, bei welche wir uns also immer blofs an unsere m und μ halten werde

§. 21.

Ehe wir aber zu einer neuen Materie übergehen, schein es zweckmäfsig, hier einige Bemerkungen anzuknüpfen, di dem Practiker vielleicht von Werth seyn könnten.

Der Nutzen, der sich aus der Berechnung unserer m und μ ziehen läfst, ist schon nach dem Beispiele im §. 18 einleuchtend; wir werden auch im Verlauf unserer Arbei noch vielfältige Gelegenheit haben, denselben immer meh und mehr zu erkennen, und wollen uns deshalb schon hie mit der Regel befreunden, dafs wir in allen den Fällen, w aus einer gröfseren Anzahl von guten Beobachtungen da arithmetische Mittel ohnehin zu nehmen ist, auch die klein Mühe nicht scheuen, das m und μ noch zu berechnen. Wie derholen wir nämlich dieses Geschäft öfters, so haben wi durch die m, welche wir auf diese Weise bekommen, im mer schon einen Maafsstab für das, was wir von andere Beobachtungen unter denselben Umständen zu halten ha ben. So z. B. bin ich gewohnt, bei meinen eigenen Be obachtungen mit demselben Theodolithen das m immer zwi schen $6''$ und $7''$ zu finden, wenn die Umstände so sind, wi sie bei den Beobachtungen des vorigen §. vorausgesetzt wur den; demnach könnte ich (wenn anders nicht noch ein spä ter zu erwähnender, absichtlich für jetzt verschwiegener Um stand hinzukäme) urtheilen, dafs jene Beobachtungen seh gut ausgefallen wären.

Jedes m, welches wir so aus dem arithmetischen Mit tel gewinnen, beruht nun auf der Voraussetzung, dafs die zun Grunde liegenden Beobachtungen gleich genau seyen. Wol

n wir es aber zu dem eben bemerkten Zwecke für andere Be-
bachtungen gebrauchen, so müssen wir zum Voraus wissen,
afs es in Beziehung auf die Umstände der anderen Beobach-
ng als eine constante Gröfse zu betrachten sey. Rück-
chtlich auf Winkel-Beobachtungen pflegen wir z. B. den
atz zum Grunde zu legen: die Genauigkeit sey unabhängig
on der Gröfse der Winkel, und dieser Satz hat auch seine
ichtigkeit, so lange wir voraussetzen dürfen, dafs die re-
elmäfsigen Fehler sorgfältigst beseitigt sind. Aber demun-
eachtet würden wir sehr irren, wenn wir nun aus einer oder
nigen Beobachtungs-Reihen mit einem Theodolithen das
festsetzen, und daraus allein schon auf alle künftigen Be-
bachtungs-Reihen mit demselben Theodolithen schliefsen
ollten. Rücksichtlich auf die unvermeidlichen Theilungs-
hler könnte ein solcher Schlufs wohl erlaubt seyn; aber es
nd noch aufserdem Fehler-Quellen vorhanden, von denen
nige bei dieser Gelegenheit doch erwähnt werden müssen.

Hierher gehört vorerst die Beleuchtung und überhaupt
ie Beschaffenheit, namentlich die mehr oder minder sym-
etrische Erscheinung der Visirpunkte. In dieser Hin-
cht sind höchstens Heliotrop-Beobachtungen bei ganz ru-
iger Luft und ganz gleicher Beleuchtung als streng ver-
leichbar zu betrachten, und auch selbst bei diesen wäre das
eigentlich, ganz streng genommen, als aus mehreren ver-
hiedenen Theilen zusammengesetzt zu betrachten, wovon der
ne den Fehlern in der Einstellung des Fernrohrs, der zweite
en Ablesungen, der dritte den Theilstrichen zur Last fällt.
Vollen wir aber von dieser äufsersten Strenge abstrahiren,
ad nur ein Urtheil über das *m* begründen, wie wir es bei
ewöhnlichen Umständen und mittelguten Visirpunkten zu
rwarten haben, so müssen wir eine grofse Menge von Win-
eln zwischen Objecten, wie sie uns eben im practischen Le-

ben vorkommen, vielleicht in jahrelangen Gebrauch eine und desselben Instrumentes, gemessen haben, und dann auch noch andere Hülfsmittel zu Bestimmung des m anwenden wovon erst später die Rede seyn kann.

Ein anderer Umstand von grofser Erheblichkeit ist die Aufstellung des Theodolithen, und zwar in doppelter Hinsicht. Erstlich können wir nun einmal nicht mikroscopisch centriren, und wenn wir also die Beobachtungen mehrerer Tage benutzen wollen, zwischen denen bei Nacht der Theodolith weggenommen ist, so steckt deshalb in unserem m ein Ueberrest von einem constanten Fehler, den wir als durch das sorgfältigste Verfahren bei der jedesmaligen Aufstellung wenigstens möglichst zu verringern suchen müssen. Zweitens ist aber, und dies hat, wie mir scheint, noch bei weitem mehr Einflufs auf die Genauigkeit der Beobachtungen, die Grundlage, worauf der Theodolith steht, sehr zu berücksichtigen, wenn dieselbe auch von den Erschütterungen durch die Bewegungen des Beobachters möglichst unabhängig gemacht ist. So hatte ich z. B. bei dem Ertelschen Theodolithen, womit ich meine Triangulirung ausführte, wenn ich auf einem Steinpostament aufstellte, mein m zwischen 3″ und 6″; dagegen wo ich auf Holz aufstellen mufste, zwischen 6″ und 9″ zu erwarten.

Endlich wollen wir noch des Umstandes erwähnen, dafs der Wind uns ein gefährlicher Feind bei dem practischen Trianguliren ist. Es wäre also ein grofser Irrthum, wenn wir ein m in der Werkstatt oder der Studirstube bestimmen und nun daraus ohne Weiteres auf die Genauigkeit der Beobachtungen schliefsen wollten, die wir z. B. auf dem Inselsberge oder dem Meisner zu erwarten hätten. Eben so sehen wir leicht ein, dafs in der ganzen Construction des Instrumentes, die überhaupt der Güte der Theilung angemessen

eyn mufs, Gründe liegen können, welche die unregelmä-
igen Erschütterungen durch den Wind mehr oder minder
chädlich machen, wenn wir auch durch schickliche Behand-
ung bekanntlich manches dazu thun können, sie zu ver-
indern. So wird also z. B. bei einem Theodolithen, des-
en Fernrohr gegen die Horizontal-Axe unverhältnifsmäfsig
ng wäre, wahrscheinlich das m mit dem Winde ab und zu-
ehmen.

Diese Bemerkungen mögen hinreichen, nur an ein Paar
eispielen zu zeigen, wie mancherlei Umstände zu berück-
chtigen sind, wenn es sich von einem bestimmten Urtheil
ber Genauigkeit von Beobachtungen handelt; und wie ver-
ienstlich es z. B. in Beziehung auf Beurtheilung von Con-
ructions-Verschiedenheiten werden kann, Beobachtungen
it verschiedenen Instrumenten und unter verschiedenen Um-
änden auf diese Weise zu untersuchen.

Zweites Kapitel.

Directe Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

§. 22.

Der Ausgleichung directer Beobachtungen von ver-
chiedener Genauigkeit mufs nach §. 8. und 18. die Kennt-
ifs von dem Verhältnifs ihrer m vorausgehen, damit man
$\left[\frac{vv}{mm}\right] = \frac{v_{\mathrm{I}}\, v_{\mathrm{I}}}{m_{\mathrm{I}}\, m_{\mathrm{I}}} + \frac{v_2\, v_2}{m_2\, m_2} + \frac{v_3\, v_3}{m_3\, m_3} + \ldots$ zu einem Minimum
machen könne. Zu dem Ausdrucke für dieses Verhältnifs be-
dient man sich aber in den meisten Fällen mit Vortheil ande-
er Zahlen, welche den Quadraten der m umgekehrt pro-

portional, also nach §. 18. den Quadraten der Genauigkei ten direct proportional sind. Diese Zahlen, welche wir m p_1; p_2; p_3; u. s. w. bezeichnen wollen, nennt man die Ge wichte (*pondera*) der Beobachtungen.

Mit dem Worte Gewicht läfst sich nun unter Rücksich auf n. 10 ein bestimmter anschaulicher Begriff verbinden Man denke sich nämlich zu den vorhandenen ungleich ge nauen Beobachtungen noch eine Reihe von anderen wirklich angestellten oder auch fingirten Beobachtungen hinzu, wel che unter einander von einerlei Genauigkeit sind, und be trachte dann jede vorhandene Beobachtung als ein arithme tisches Mittel aus einer gewissen Anzahl dieser hinzugedach ten Beobachtungen. Eine der letzteren bezeichnen wir dan mit dem Namen Gewichts-Einheit, und die Anzahl vo Gewichts-Einheiten, welche beobachtet seyn müfsten, dam ihr arithmetisches Mittel dieselbe Genauigkeit habe, die ei ner vorgegebenen angestellten Beobachtung zukommt, nen nen wir dann das Gewicht dieser letzteren.

Da nun die mittleren Fehler arithmetischer Mittel de Quadrat-Wurzeln aus der Anzahl der dazu gehörigen Be obachtungen umgekehrt proportional sind, so ist nach n. 1

$$p_1 m_1 m_1 = p_2 m_2 m_2 = p_3 m_3 m_3 \text{ u. s. w.}$$

Es sind also diese Producte als eben so viele Ausdrück für das Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichts-Einhe zu betrachten; die Gewichts-Einheit selbst ist aber im All gemeinen willkührlich, da es zunächst nur auf das Verhält nifs der p ankommt, wenn gleich manchmal in der Beschaf fenheit der Beobachtungen ein Grund liegt, weshalb wir ein gewisse Gewichts-Einheit natürlicher und lieber wählen al eine andere.

Diese Vorstellungs-Weise schliefst sich auch ganz en

er oben §. 7. erwähnten Analogie an. Denken wir uns näm-
ch verschiedene Punkte des Raumes mit verschiedenen Ge-
ichten belastet, so müssen wir, um sie ins Gleichgewicht
u setzen, erst das Verhältnifs der Gewichte wissen, und
azu gelangen wir ganz einfach, wenn wir die Anzahl von
ewichts-Einheiten kennen, die für jedes einzelne zu sub-
tituiren ist.

Das Vorhergehende zu erläutern, mögen zwei einfache
eispiele dienen.

1) Zwei Beobachtungen o_1 und o_2 desselben Winkels
eyen mit demselben Instrument, und unter denselben Um-
tänden gemacht, die erste aber beruhe auf 10, die zweite
uf 15 Repetitionen. Hier ist es am natürlichsten, eine ein-
ache Beobachtung mit demselben Instrument als Gewichts-
inheit anzunehmen, und also zu setzen $p_1 = 10$; $p_2 = 15$.
ber nothwendig ist dies nicht; es kann jede andere Ge-
ichts-Einheit gewählt werden, welche nur $\frac{p_1}{p_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
iebt. Das Verhältnifs der Genauigkeiten wird dann immer
urch $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, das Verhältnifs der mittleren Fehler aber durch
$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ausgedrückt seyn. Setzten wir z. B. $p_1 = 2$ und
$_2 = 3$ um die kleinsten Zahlen zu erhalten, so wäre das
Mittel einer fünfmaligen Repetition die Gewichts-Einheit.

2) Wären zwei Beobachtungen o_1 und o_2 desselben
Winkels mit zwei verschiedenen Theodolithen ohne Repe-
ition gemacht; so müfsten wir, um die Genauigkeiten zu
ergleichen, zuerst aus anderweit vorhandenen oder zu die-
em Zwecke besonders angestellten Beobachtungs-Reihen
ie m nach den Principien der früheren §§. bestimmen.
Gesetzt nun, es wäre gefunden $m_1 = 10''$ und $m_2 = 5''$; so
wären nun die Gewichte so zu bestimmen, dafs $\frac{p_1}{p_2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Hier ist es also am bequemsten, die Beobachtung o_1 selbst zur Gewichts-Einheit zu nehmen, und der o_2 ein vierfaches Gewicht oder eine doppelte Genauigkeit zuzuschreiben. Läge aber irgend ein Grund vor, weshalb wir lieber die Beobachtungen mit einem dritten Theodolithen, den wir etwa regelmäfsig zu gebrauchen gewohnt wären und dessen m z. B. unter denselben Umständen $= 7''$ zu setzen wäre, als Gewichts-Einheiten betrachten wollten, so würden die Producte $p_1 . 100$ und $p_2 . 25$ der Zahl 49 gleich seyn müssen; also $p_1 = \frac{49}{100}$; $p_2 = \frac{49}{25}$.

§. 23.

Beschränken wir uns hier, wie im §. 11, auf eine einzige Beobachtungsgröfse O, für welche die Beobachtungen o_1; o_2; o_3 ... nebst den Verhältnifszahlen der mittleren Fehler m_1; m_2; m_3 .... oder der Gewichte p_1; p_2; p_3 ... gegeben sind; so geschieht dadurch hier der Allgemeinheit eben so wenig Abbruch wie oben.

Der gesuchte möglichst genäherte Werth, welchen wir für O nehmen müssen, so lange keine neuen Beobachtungen hinzukommen, werde wieder mit M bezeichnet.

Wir haben nun nach unserem Princip, in der §. 8. angegebenen allgemeineren Fassung desselben, zu machen, dafs $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ oder dafs $[pvv]$ ein Minimum werde.

Der Widerspruch wird auch hier gehoben, wenn

$$o_1 + v_1 = M$$
$$o_2 + v_2 = M$$
$$o_3 + v_3 = M \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist zuerst

$$v_1 = M - o_1$$
$$v_2 = M - o_2$$
$$v_3 = M - o_3 \text{ u. s. w.}$$

u setzen, und dann durch Quadriren, Multipliciren mit den ezüglichen p, und Addiren, die Gröfse $[pvv]$ herzustel-en. Dadurch erhalten wir

$$[pvv] = p_1(M-o_1)^2 + p_2(M-o_2)^2 + p_3(M-o_3)^2 + \dots$$

lso $$\frac{d[pvv]}{dM} = 2p_1(M-o_1) + 2p_2(M-o_2) + 2p_3(M-o_3) + \dots$$

nd ist also zur Erfüllung der Bedingung zu setzen

$$0 = p_1(M-o_1) + p_2(M-o_2) + p_3(M-o_3) + \dots$$

vas uns endlich giebt

$$M = \frac{p_1 o_1 + p_2 o_2 + p_3 o_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}$$

der kurz

n. 12. $$M = \frac{[po]}{[p]}.$$

Die so gewonnene Gröfse M nennen wir dann auch hier, ur im allgemeineren Sinne, wieder das arithmetische Mittel der Beobachtungen.

Wir hätten, wenn irgend ein besonderer Grund dazu gewesen wäre, auch statt der p die m bei der Rechnung zum Grunde legen können und hätten dann nur als eine andere Form von n. 12 erhalten

$$M = \frac{\left[\frac{o}{mm}\right]}{\left[\frac{1}{mm}\right]},$$

welcher Ausdruck aber in der Regel weniger bequem ist. Beide Formen aber führen auf unsere Gleichung n. 1 zurück, welche den speciellen Fall darstellt, dafs alle m und also auch alle p einander gleich werden. In dieser Voraussetzung wird nämlich

$$M = \frac{p[o]}{pz_0} = \frac{\frac{1}{mm}[o]}{\frac{1}{mm} \cdot z_0} = \frac{[o]}{z_0}.$$

Die Willkühr übrigens, welche bei Wahl der Gewichts-Einheit statt findet, spricht sich auch in unserer Gleichung n. 12 aus; denn ändern wir die Einheit, so fügen wir dadurch nur allen p einen gemeinschaftlichen Factor bei, der sich aufhebt, weil Zähler und Nenner von n. 12 nothwendig gleich viele Factoren haben.

Wir finden ferner in der Gleichung n. 12 eine Rechnungsweise als allgemein gültig dargestellt, welche uns ohnehin als specielle practische Vorschrift von jeher geläufig ist. Sind nämlich die Beobachtungen einer und derselben Beobachtungs-Gröfse durch Repetitionen entstanden und nur wegen verschiedener Repetitionszahl von verschiedener Genauigkeit, so haben wir von jeher das Mittel daraus so zu nehmen gelernt, dafs wir sie erst einzeln mit ihren Repetitionszahlen multipliciren und dann die Summe der Producte durch die Summe der Repetitionszahlen dividiren. Wir erkennen nun hier, dafs dieses Verfahren ganz mit dem Princip der kleinsten Quadrate übereinstimmt, und dafs dabei die einzelne nicht repetirte Beobachtung als Gewichts-Einheit zum Grunde liegt, welches hier auch besonders bequem, aber nicht gerade nothwendig ist.

Die Gleichung, aus welcher n. 12 unmittelbar folgte, giebt endlich

$$\text{n. 13.} \qquad [pv] = 0,$$

welche hier also an die Stelle von unserem obigen n. 2 tritt.

§. 24.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen setzten wir nur voraus, dafs das Verhältnifs der m_1; m_2; m_3 .... bekannt sey. Es entsteht jetzt aber die Aufgabe: aus dem aufgefundenen M und den daraus folgenden v die m selbst zu berechnen, oder mit anderen Worten: den mittleren zu

befürchtenden Fehler jeder einzelnen Beobachtung seiner absoluten Gröfse nach zu schätzen. Von einem mittleren Fehler aller Beobachtungen, wie wir ihn §. 17. schätzen lernten und mit m bezeichneten, kann nun natürlich hier nicht mehr die Rede seyn. Wir erleichtern uns aber die Untersuchung, wenn wir der Gewichts-Einheit einen mittleren Fehler zuschreiben, den wir uns als Abweichung derselben von der Wahrheit denken können. Zu dessen Bezeichnung wollen wir von nun an den Buchstaben m ohne Ordnungszahl benutzen, der seine frühere Bedeutung verloren hat. Dann können wir nach Mafsgabe der Gleichung n. 10 und der Erörterung des §. 22. setzen:

$$mm = p_1 m_1 m_1 = p_2 m_2 m_2 = p_3 m_3 m_3 \text{ u. s. w.}$$

d. h. wenn wir die Ordnungszahl allgemein mit n bezeichnen:

$$\text{n. 14.} \qquad m_n = \frac{m}{\sqrt{p_n}}.$$

Behalten wir für den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels M, welches wir nach n. 12 berechnen lernten, hier auch den oben schon gebrauchten Buchstaben μ bei, so bekommen wir

$$\text{n. 15.} \qquad \mu = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2 + p_3}} = \frac{m}{\sqrt{[p]}},$$

wofür wir auch schreiben könnten

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1 m_1} + \frac{1}{m_2 m_2} + \frac{1}{m_3 m_3}}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{mm}\right]}}.$$

Dem arithmetischen Mittel können wir aber eben so gut wie unseren Beobachtungen ein Gewicht zuschreiben, in Beziehung auf dieselbe Gewichts-Einheit. Bezeichnen wir dieses Gewicht des berechneten Mittels mit P, so mufs seyn

$$P\mu\mu = mm,$$

also mit Rücksicht auf n. 15

$$\text{n. 16.} \qquad P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = [p],$$

was auch wieder ganz mit unserem Gleichnisse vom Schwerpunkt übereinstimmt.

Es ist also alles bekannt, was wir zu wissen begehren, sobald die Gröfse m geschätzt ist. Geschätzt sagen wir, denn wir haben hier, wie früher, die Unmöglichkeit vor Augen, zu einer scharfen Bestimmung dieser nützlichen Gröfsen zu gelangen, weil wir das wahre O nie ausmitteln können.

§. 25.

Um den mittleren Fehler der Gewichts-Einheit zu schätzen, können wir denselben Weg einschlagen, den wir in dem §. 15. und 16. giengen. Nur müssen wir anfangs noch einen Umweg machen. — Denken wir uns nämlich neben jedem o noch eine Beobachtung der Gewichts-Einheit angestellt und bezeichnen wir die Werthe von O, welche diese fingirten Beobachtungen gegeben haben würden, einstweilen mit g_1; g_2; g_3; ... so kommt es nun zuerst darauf an, aus der Kenntnifs unserer v_1; v_2; v_3 .... die Abweichungen dieser Gröfsen g vom Mittel M zu schätzen, welche Abweichungen wir mit δ_1; δ_2; δ_3 ... bezeichnen wollen. Betrachten wir nun zuerst eine einzelne von diesen Gröfsen, so haben wir $O - g_1 = m$ zu schätzen, eben so wie wir $O - o_1 = m_1$ schätzen wollten. Also haben wir vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta_1 &= M - g_1 & m &= O - g_1 \\ v_1 &= M - o_1 & m_1 &= O - o_1 \end{aligned}$$

in welchen acht verschiedene Gröfsen vorkommen. Von diesen acht Gröfsen kennen wir nur o_1 aus Beobachtung, M

und v_1 aus unseren bisherigen Rechnungen, wissen aber überdies nur noch das Verhältnifs von m und m_1 vermöge unserer ursprünglichen Voraussetzung, die sich in n. 14 ausgesprochen findet. Wir haben also nicht Angaben genug, um das δ_1 zu berechnen, und müssen zu seiner Schätzung also noch eine anderweite Kenntnifs oder Voraussetzung zu Hülfe nehmen. — Hierzu benutzen wir nun den Umstand, dafs, wenn auch das wahre O uns nothwendig immer unbekannt bleibt, doch in dem von uns dargestellten M ein Werth vorliegt, welcher dem O so sehr genähert ist als möglich. Demnach dürfen wir uns die Voraussetzung erlauben, dafs das Verhältnifs $\frac{\delta_1}{v_1}$ dem bekannten Verhältnisse $\frac{n}{n_1}$ gleich sey. Wir setzen also

$\delta_1\delta_1 = p_1 v_1 v_1$ vermöge der ersten Beobacht., und eben so
$\delta_2\delta_2 = p_2 v_2 v_2$ - - zweiten -
$\delta_3\delta_3 = p_3 v_3 v_3$ - - dritten -
u. s. w.

Solcher Bestimmungen der Gröfsen $\delta\delta$ haben wir nun so viele als Beobachtungen g fingirt, oder als Beobachtungen o wirklich angestellt sind, d. h. z_o, und demnach thun wir alles, was die Umstände erlauben, wenn wir setzen:

$$[\delta\delta] = p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + p_3 v_3 v_3 + \ldots$$

und also die mittlere Abweichung der g vom Mittel M durch $\sqrt{\frac{[pvv]}{z_o}}$ ausdrücken, indem wir die Summe $[pvv]$ über alle bisher fingirte Beobachtungen g gleichmäfsig vertheilen. — Den letzten Schritt, welcher uns noch übrig bleibt, machen wir ganz eben so wie im §. 16. Wir denken uns nämlich die Gewichts-Einheit noch einmal und zwar

fehlerfrei beobachtet. In sofern wir sie als beobachtet denken, müssen wir unseren bisherigen $[ss]$ noch ein mm beifügen, und in sofern wir sie als fehlerfrei denken, müssen wir diese neue Summe ausschliefslich auf die z_o bisherigen Beobachtungen g zu gleichen Theilen vertheilen; demnach haben wir endlich zu setzen

$$z_o mm = [ss] + mm \text{ oder}$$

n. 17. $$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{z_o - 1}}.$$

Diese Gleichung geht in unsere n. 7 über, sobald wir unsere p sämmtlich $= 1$ setzen, wie es auch seyn mufs.

§. 26.

Das Rechnungs-Beispiel wollen wir aus denselben Messungen nehmen, die schon §. 20. gebraucht wurden. Der dort verschwiegene Umstand war kein anderer, als dafs die Beobachtungen keineswegs gleich genau, sondern aus Repetitionen von verschiedener Anzahl entstanden waren. Wir verschwiegen dies damals absichtlich, um an einem und demselben Rechnungs-Beispiele die Vergleichung beider Rechnungs-Weisen zeigen zu können. Wollen wir es also jetzt ernstlich mit unseren Beobachtungen nehmen, so müssen wir zuerst die Gewichts-Einheit festsetzen, wozu wir am bequemsten hier die einfache Messung wählen können, so dafs für die p nur die Repetitionszahlen abzuschreiben sind, welche sich im Winkel-Protocoll finden.

Sodann berechnen wir folgende Columnen:

rdn.Z.	p	o	po	v	pv	vv	pvv
1	5	45″,00	225,00	— 5,22	— 26,10	27,248	136,24
2	4	31 ,25	125,00	+ 8,53	+ 34,12	72,761	291,04
3	5	42 ,50	212,50	— 2,72	— 13,60	7,398	36,99
4	3	45 ,00	135,00	— 5,22	— 15,66	27,248	81,74
5	3	37 ,50	112,50	+ 2,28	+ 6,84	5,198	15,59
6	3	38 ,33	115,00	+ 1,45	+ 4,35	2,103	6,31
7	3	27 ,50	82,50	+12,28	+ 36,84	150,798	452,39
8	3	43 ,33	130,00	— 3,55	— 10,65	12,603	37,81
9	4	40 ,63	162,50	— 0,85	— 3,40	0,723	2,89
10	2	36 ,25	72,50	+ 3,53	+ 7,06	12,461	24,92
11	3	42 ,50	127,50	— 2,72	— 8,16	7,398	22,19
12	3	39 ,17	117,50	+ 0,61	+ 1,83	0,372	1,12
13	2	45 ,00	90,00	— 5,22	— 10,44	27,248	54,49
14	3	40 ,83	122,50	— 1,05	— 3,15	1,103	3,31
	46		1830,00		+ 91,04		1167,03
					— 91,16		

Bei der Berechnung von po versäumten wir nicht, die ei Abrundung der zweiten Decimale von o verloren gegan- genen Decimalen herzustellen, und setzten also z. B. $p_8 o_8$ icht 129,99 sondern 130,00. An die bekannte Prüfung us dem Protocolle brauchen wir wohl nicht zu erinnern.

Nachdem $[po]$ gebildet ist, haben wir zuerst nach n. **12** berechnet

$$M = \frac{1830{,}00}{46} = 39''{,}78 .$$

Dann haben wir die Columne für v gebildet und daraus gleich auch pv. Diese letzte Columne berechnen wir, um nach n. **13** erst das bisherige zu prüfen. Wir sehen hier, dafs $[pv] = -0{,}12$ wird, und finden die fehlenden 12 posi- iven Einheiten in $[po]$ wieder, wo wir sie in der Division mit 46 bei der Abrundung auf die zweite Decimale vernachläs- igten. Die Columne vv berechnen wir nun wie in §. **20.**, ver- säumen aber ja nicht uns gegen Rechnungsfehler gehörig si- cher zu stellen, weil hier keine weitere Prüfung vorkommt. Haben wir ihre Prüfung z. B. durch unmittelbare Quadri-

rung oder Quadrat-Tafeln vorgenommen, so schreiben wir auch noch wohl, wie hier geschehen, eine Decimale mehr auf als nöthig, um in der folgenden Columne die Abrundung sicherer vorzunehmen. Nothwendig aber ist es offenbar nicht, diese Vorsicht anzuwenden, wenn sie uns unter Umständen die Arbeit zu sehr vermehrte. Ist dann die letzte Columne auch noch hergestellt und addirt, versteht sich mit vollkommener Richtigkeit, so rechnen wir nun nach n. 17 und 15

$$\begin{array}{rl} log.\,1167{,}03 = & 3{,}06708 \\ log.\,13 = & 1{,}11394 \\ & \overline{1{,}95314} \\ log.\,m = & 0{,}97657 \\ m = & \pm 9'',475 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} log.\,\gamma 46 = & 0{,}83138 \\ log.\,\mu = & 0{,}14519 \\ \mu = & \pm 1'',397. \end{array}$$

Wollen wir aber nun für die einzelnen Beobachtungen noch die mittleren Fehler bestimmen, so haben wir nach n. 14 zu rechnen:

$log.\,\gamma 2 = 0{,}15052$ und also $6'',70 = m_{10} = m_{13}$

$log.\,\gamma 3 = 0{,}23856$ $\quad 5\,,47 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m_{11} = m_{12} = m_{14}$

$log.\,\gamma 4 = 0{,}30103$ $\quad 4\,,74 = m_2 = m_9$

$log.\,\gamma 5 = 0{,}34948$ $\quad 4\,,24 = m_1 = m_3$

§. 27.

Das richtige Urtheil über die Beobachtungen des vorigen §. würde nun lauten: Die Beobachtungen sind weniger genau, als ich sie unter denselben Umständen zu erhalten pflege. Setze ich nämlich mein gewöhnliches $m = 6'',5$, so kann ich schätzen, dafs 2 Beobachtungen von den hier vorliegenden dieselbe Genauigkeit geben, wie eine einfache von mir, oder dafs, in Beziehung auf die meinigen, ihnen

das Gewicht $\frac{1}{2}$ zukommt, indem $\left(\frac{9,475}{6,5}\right)^2$ nahe $= 2$ ist. Wollte ich also das $M = 39'',78$ mit anderen eigenen Beobachtungen verbinden; so hätte ich statt $P=46$ erst $P=23$ zu setzen, ehe ich anfangen dürfte, weiter zu rechnen.

Im Allgemeinen haben wir uns zu bemerken, dafs wir vor der Zusammenstellung von Mitteln, deren jedes sein eigenes P hat, erst untersuchen müssen, ob auch dieselbe Gewichts-Einheit bei ihnen zum Grunde liegt. Ist nämlich dieses nicht der Fall, so mufs der weiteren Rechnung erst eine Reduction der Gewichte vorausgehen, wenn wir uns nicht die unnöthige Mühe machen wollen, die ganze Rechnung für die M mit veränderten Gewichts-Einheiten zu wiederholen.

Hätte z. B. ein Gehülfe einen Winkel durch 58 malige Repetition gemessen, und uns neben dem Resultate: $M_{\text{I}} = 51'',34$; $P_{\text{I}} = 58$; auch sein Protocoll eingeschickt; so würden wir nun, falls er etwa die Rechnung noch nicht selbst gemacht hätte, aus letzterem auch sein m finden können. Es sey z. B. sein $m = 9''$. Gesetzt nun, wir hätten demnächst für denselben Winkel aber mit einem anderen Instrumente und unter anderen Umständen gefunden: $M_2 = 42'',53$; $P_2 = 25$; $m = 4''$; so würden wir nun den Werth des Winkels nicht ohne Weiteres $= \frac{M_{\text{I}} + M_2}{2}$ setzen dürfen; auch dürften wir ihn nicht durch blofse Anwendung der Repetitionszahlen $= \frac{P_{\text{I}} M_{\text{I}} + P_2 M_2}{P_{\text{I}} + P_2}$ setzen, weil diese Formel einerlei Gewichts-Einheit voraussetzt; sondern wir müfsten erst mit Hülfe der beiden verschiedenen m die Gewichte reduciren, d. h. die P so abändern, dafs sie derselben Gewichts-Einheit entsprechen, statt dafs sie unmittelbar sich nur auf die einfache Beobachtung jeder einzelnen Reihe beziehen. Diese Reduction können wir nun vornehmen, in-

dem wir eine der angegebenen Gewichts-Einheiten beibehalten und die andere darnach ändern, oder auch, wenn etwa ein besonderer Grund dazu vorläge, indem wir eine beliebige neue Gewichts-Einheit einführen.

Wollen wir z. B. oben $P_2 = 25$ beibehalten und die reducirten Gewichte mit R bezeichnen, so wäre nach n. 15 $\mu_1 \mu_1 = \frac{81}{P_1} = \frac{16}{R_1}$ zu setzen, d. h. $R_1 = \frac{16}{81} P_1 = \frac{16}{81} . 58$ $= 11{,}4568$; die 58 Repetitionen des Gehülfen gelten also nur für 11,4568 von den unsrigen; und würde also das Endresultat $= \frac{R_1 M_1 + P_2 M_2}{R_1 + P_2} = 45'',30$ seyn.

Eben so wäre, wenn wir $P_1 = 58$ beibehalten hätten, $R_2 = \frac{81}{16} P_2 = \frac{81}{16} . 25 = 126{,}563$ und das Endresultat $= \frac{P_1 M_1 + R_2 M_2}{P_1 + R_2} = 45'',30$ wie vorher.

Wir hätten aber auch, in Erwägung, dafs die m doch nur Näherungen sind, in diesem besonderen Fall uns die Rechnung etwas erleichtern können, wenn wir $\frac{16}{81} = \frac{1}{5}$ gesetzt hätten. Dies würde uns das erste mal 45″,25; das letzte mal 45″,32 gegeben haben, statt des obigen möglichst genäherten 45″,30. — In wiefern dergleichen Näherungen erlaubt sind, hängt natürlich jedesmal von Umständen und Zweck ab.

§. 28.

Ehe wir in unseren Betrachtungen weitergehen, wollen wir hier gleich noch einen Umstand zur Sprache bringen, der den Practiker mitunter in Verlegenheit setzen kann, obwohl wir bevorworten müssen, dafs wir ihm keine allgemeinen Regeln dagegen vorschreiben, höchstens einige Rathschläge geben können, ihn vielmehr in den meisten Fällen auf sein eigenes practisches Gefühl zu verweisen haben.

Es kommen nämlich immer, besonders bei ausgedehnten Beobachtungs-Reihen einzelne Beobachtungen vor, gegen die wir vor Anstellung der Rechnung keinen Verdacht hatten, die aber nach Vollendung derselben soviel von den übrigen abweichen, dafs wir in den Zweifel gerathen, ob sie nicht nach dem Erfolg auszuschliefsen seyen, oder ob wir nicht berechtigt seyen, ihnen ein geringeres Gewicht als den übrigen beizulegen. — Eine solche Beobachtung haben wir z. B. in unserer Reihe §. 26. an $o_{,,}$, wo wir nach Vollendung unserer Rechnung sehen, dafs $v_7 = 12'',28$ mehr als das doppelte von m_7 beträgt; statt dafs die übrigen v mit ihren m alle besser harmoniren. — Was nun zuerst die Frage betrifft, ob wir nicht vielleicht einer solchen Beobachtung des Erfolges wegen ein geringeres Gewicht beizulegen, und damit die Rechnung zu wiederholen veranlafst seyn sollten, also z. B. in unserem Fall $p_7 = 1$ setzen, statt dafs wir vor dem Erfolge $p_7 = 3$ zu setzen beschlossen hatten; so ist das überaus mifslich, und immer entschieden abzurathen, wenn nicht ganz besondere Gründe vorliegen, die schon im Protocoll stehen. So also könnten wir uns in unserem Beispiele wohl dazu entschliefsen, wenn im Protocolle stände: „Beim letzten Einstellen fing es plötzlich an zu regnen. Es wurde der Regensack übergezogen und erst nach einer Stunde abgelesen." In diesem Falle könnten wir wohl vermuthen, dafs die letzte Einstellung aus Furcht vor dem Nafswerden des Instrumentes etwas zu eilig geschehen sey. Aber auch dann wäre es vielleicht zweckmäfsiger, die Beobachtung zu streichen, als nach dem Erfolge $p_7 = 1$ zu setzen. Gar zu leicht kommt man nämlich, wenn man einmal anfängt, an der zum voraus gemachten Festsetzung für die p etwas zu ändern, in die Versuchung, mehr zu thun, als recht ist; ja es würde dies

Verfahren am Ende dahin führen können, die p so lange zu modificiren, bis man eine schöne Harmonie auf dem Papiere hätte, die aber doch im Grunde für die Wahrheit, die wir suchen, nichts bewiese. Aber auch mit dem Ausstreichen der Beobachtungen soll man nur sehr vorsichtig zu Werke gehen. Jede Beobachtung, die nicht einen entschiedenen protocollarischen Verdachtsgrund gegen sich hat, habe ich als einen Zeugen für die Wahrheit zu betrachten, und eben so wenig wie ich den Zeugen torquiren darf, bis er sagt, was ich gesagt haben will, ebenso wenig darf ich auch ohne Weiteres sein Zeugnifs verwerfen, weil dasselbe von den übrigen bedeutend abweicht. — Wäre nun z. B. oben neben o_7 von der Rechnung zu Protocoll gebracht, dafs diese Beobachtung mit sehr ermüdeten Augen, oder bei eintretender Dämmerung noch gemacht sey, so würde das allerdings ein Grund seyn nach dem Erfolge zu streichen; denn es liegt der Verdacht entschieden vor, dafs die Abweichung aus der bemerkten Ursache entstanden sey.

Wenn wir aber uns darnach auch zur Regel machen, im Streichen oder Gewichts-Verändern nur sehr vorsichtig zu seyn, und lieber Zweifel zu unterdrücken, als ihnen Folge zu geben, wo wir noch einigermaafsen denken können, dafs eine von den seltneren unbekannten Fehler-Quellen vielleicht zufällig einmal allein eingewirkt hätte, so bleiben doch noch immer mitunter Beobachtungen übrig, die wir nach dem Erfolge streichen müssen, weil wir es für wahrscheinlicher halten, dafs ein grober Fehler vorgefallen sey, als dafs ein unvermeidlicher Fehler eine so grofse Abweichung hervorbringen könne. — Ueber dieses Dafürhalten läfst sich aber keine Regel geben, (es ist mir auch nicht bekannt, dafs irgend ein haltbarer Versuch dazu je gemacht sey,) sondern es bleibt der Beobachter hier ganz auf sein practisches Gefüh

erwiesen, was ihn ja ohnehin in vielen Dingen leiten muſs, die sich durch Rechnen nun einmal nicht zwingen lassen.

Ein sorgfältiger und gewissenhafter practischer Geometer kommt zum Glück auch nur selten in den Fall, nach dem Erfolge streichen zu müssen. Beobachtet er aber die oben empfohlene Vorsicht, so wird er auch gewiſs darüber beruhigt seyn, dabei der Wahrheit nicht zu nahe zu treten.

Drittes Kapitel.

Genauigkeit der Functionen direct beobachteter Gröſsen.

§. 29.

Es scheint zweckmäſsig, ehe zu der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen übergegangen wird, hier gleich erst die Frage vorzunehmen, welche sich unmittelbar an unsere bisherigen Betrachtungen anknüpft: Wie die Genauigkeit solcher Gröſsen zu bestimmen sey, welche aus ausgeglichenen directen Beobachtungen berechnet werden? — Es sind nämlich in der practischen Geometrie verhältniſsmäſsig immer nur wenige Fälle, in welchen wir uns nun für immer befriedigt halten können, wenn wir die Beobachtungsgröſsen selbst festgestellt, und ihre Genauigkeit berechnet haben; in der bei weitem überwiegenden Mehrzahl der Fälle gebrauchen wir sie, um andere Gröſsen daraus abzuleiten, und dann ist jene Frage nicht bloſs Sache wissenschaftlicher Neugier, sondern ihre Beantwortung wird uns durch practisches Bedürfniſs zur unabweislichen Nothwendigkeit und Pflicht.

Sehr oft kommen wir in den Fall, einen gewissen Zweck auf verschiedene Weise durch directe Beobachtungen erreichen zu können, und da ist denn vor Allem zu untersuchen, ob wir auf die eine, oder auf die andere Weise mehr Genauigkeit erlangen können, und derjenige Weg einzuschlagen, welcher, unter übrigens gleichen Umständen, die gröfste Genauigkeit verspricht. Wäre so z. B. aus einer gemessenen Basis AB eine andere gerade Linie YZ durch ein Triangel-Netz zu bestimmen, und hätten wir für dasselbe die Wahl zwischen dem Fortschreiten über die Punkte $A, B, C, D \ldots Y, Z$ oder über die Punkte $A, B, T, U \ldots Y, Z$ so würden wir uns erinnern, dafs die unvermeidlichen Fehler in den Winkel-Beobachtungen sich auf die Bestimmung der Linie YZ fortpflanzen, und nun also dasjenige der beiden Systeme vorziehen, welches die gröfste Genauigkeit für diese Linie giebt.

Nach unserer Festsetzung über den Begriff der Genauigkeit §. 18. haben wir also aus den mittleren Fehlern der festgestellten Beobachtungs-Gröfsen den mittleren Fehler einer Gröfse zu schätzen, welche eine bekannte Function der Beobachtungs-Gröfsen ist. Wir brauchen wohl kaum noch zu erinnern, dafs wir denselben Zweck erreichen, wenn wir statt der mittleren Fehler die Gewichte einführen; nur dürfen wir dabei nie vergessen, dafs dann nothwendig eine Annahme über die an sich willkührliche Gewichts-Einheit vorausgehen mufs. Ob es aber in einem bestimmten Falle bequemer ist, mit den mittleren Fehlern selbst, oder mit den Gewichten die Rechnung durchzuführen, dies hängt von den jedesmaligen Umständen ab. Deshalb werden wir auch hier die Gleichungen immer in beiden Formen darstellen, zu beliebiger Auswahl im practischen Gebrauche.

Wir wollen ferner nun mit m_1; m_2; m_3 .... die mitt-

leren Fehler, mit p_1; p_2; p_3; .... die Gewichte der, nach den Principien der beiden vorigen Kapitel festgestellten, Beobachtungsgröfsen selbst (unserer bisherigen M) bezeichnen, da wir an einzelne directe Beobachtungen, die zu ihrer Feststellung etwa dienten, oder hätten dienen müssen, wenn sie nicht ein für allemal bestimmt werden konnten, nun nicht mehr zu denken brauchen, und also jenen Buchstaben nunmehr neue Bedeutungen geben dürfen. Eben so wollen wir von nun an mit m den mittleren Fehler, und mit P das Gewicht der aus den Beobachtungsgröfsen berechneten Function bezeichnen. Benennen wir endlich letztere noch mit u, erstere mit t_1; t_2; t_3 .... so lautet unsere Aufgabe also:

m oder P ist aus m_1; m_2; m_3; oder aus p_1; p_2; p_3.... zu finden, wenn $u = f(t_1; t_2; t_3 ....)$ oder $0 = F(u; t_1; t_2; t_3 ....)$ gegeben ist.

§. 30.

Um mit dem Einfachsten anzufangen, und das Folgende vorzubereiten, behandeln wir erst den Fall, wo

$$u = t_1 + t_2.$$

Hier ist nun offenbar

$$u \pm m = t_1 \pm m_1 + t_2 \pm m_2 \text{ zu setzen,}$$

also $$\pm m = \pm m_1 \pm m_2.$$

Quadriren wir beiderseits, so kann eben so wohl seyn:

$$mm = m_1 m_1 + 2 m_1 m_2 + m_2 m_2 \text{ als auch}$$
$$mm = m_1 m_1 - 2 m_1 m_2 + m_2 m_2.$$

Wir haben also als den mittleren Werth zu setzen:

$$mm = m_1 m_1 + m_2 m_2 \text{ d. h.}$$

n. 18. $$m = \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2}.$$

Wollen wir die Gewichte einführen, so haben wir, da die

Gewichts-Einheit willkührlich aber überall dieselbe ist, zu setzen:

n. 19. $\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ oder

n. 20. $P = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}$.

Ganz eben so würden wir zu rechnen haben, wenn $u = t_1 - t_2$ wäre; denn auch hier wäre $mm = m_1 m_1 \pm 2 m_1 m_2 + m_2 m_2$, wofür zu setzen ist $m_1 m_1 + m_2 m_2$.

Dieses Weglassen des mit dem doppelten Zeichen behafteten Gliedes rechtfertigt sich durch unsere schon öfter gemachte Bemerkung, dafs wir immer nur die $m_1 m_1$ und $m_2 m_2$ unmittelbar finden, und wenn wir daraus $m_1 = \sqrt{m_1 m_1}$ als einen Zahlenwerth berechnen, hierbei nie vergessen werden darf, dafs vermöge unserer ursprünglichen Voraussetzung über die Natur der zufälligen Fehler, dem m, welches ein Maafs für zufällige Fehler seyn soll, eben so leicht das positive, als das negative Zeichen zukommen kann. Insofern ist also auch ein Product von der Form $m_1 m_2$ immer als mit doppeltem Zeichen behaftet zu betrachten und also neben $m_1 m_1$ u. s. w., was immer positiv ist, wegzulassen.

Diese letzte Bemerkung behält auch dann noch ihre Richtigkeit, wenn etwa $m_1 = m_2$ zu setzen ist, d. h. wenn die beiden Beobachtungs-Gröfsen, deren Summe oder Differenz wir bilden wollen, gleich genau sind, indem dann würde: $mm = m_1 m_1 \pm 2 m_1 m_1 + m_1 m_1 = 2 m_1 m_1$. Wir haben also für diesen besonderen Fall

$$m = m_1 \sqrt{2}$$

$$P = \frac{p_1}{2}.$$

§. 31.

Einige **Rechnungs-Beispiele** mögen nun erst das Vorige erläutern.

1) Es sey ein Winkel $= u$ zu berechnen aus der Summe einer beiden Theile x und y. Es ist gemessen $x = 109°$ 1′ 4″,44 durch 25 malige Repetition mit einem Theodolithen, bei welchem wir den mittleren Fehler der einfachen Messung $\pm 4''$ setzen können. Eben so ist gemessen $y =$ 0°26′ 34″,26 durch 30 malige Repetition mit einem Theodolithen, der bei einfacher Messung $\pm 9''$ mittleren Fehler zu geben pflegt. Also ist jedenfalls $u = 150°7′ 38″,70$ der wahrscheinlichste Werth, den wir aus den Beobachtungen finden können. — Fragen wir aber nach der Genauigkeit desselben, und wollen mit dem Gewichte rechnen, so müssen wir zuerst nach §. 27. die Gewichts-Einheit festsetzen, und darnach die Repetitionszahlen reduciren. Wir wollen nun die einfache Messung mit dem ersten Theodolithen zur Gewichts-Einheit nehmen. Dann haben wir $p_1 = 25$; $p_2 = \frac{30 \cdot 16}{81} = 5{,}92$, also nach n. 20. $P = \frac{5{,}92 \cdot 25}{30{,}92} = 4{,}787$; oder mit Hülfe von n. 14. $m = \frac{4''}{\sqrt{4{,}787}} = \pm 1''{,}828$, während $m_1 = \frac{4}{\sqrt{25}} = \pm 0''{,}800$; $m_2 = \frac{9''}{\sqrt{30}} = \pm 1''{,}643$ wird. — Wir hätten auch ohne die Gewichte zu demselben Zwecke gelangen können, wenn wir zuerst m_1 und m_2, und daraus nach n. 18 unser m berechnet hätten.

Unser P zeigt uns nun deutlich, dafs wir, insofern blofs u zu finden der Zweck gewesen wäre, viel besser gethan hätten, u selbst mit dem ersten Theodolithen nur fünfmal zu repetiren, als es aus den 55 obigen Repetitionen zusammenzusetzen. Ein Resultat, welches vielleicht einen mit dieser

Art Untersuchungen noch nicht vertrauten Practiker überra-
schen könnte.

2) Wenn der geographische Längen-Unterschied zweier Orte dadurch bestimmt werden soll, dafs auf einem beiderseits sichtbaren Berge Signale gegeben werden, deren Zeit-Moment an beiden Orten mittelst gehörig berichtigter Uhren beobachtet wird, so läfst sich durch wiederholte Beobachtungen der Art der mittlere Fehler einer solchen Doppel-Beobachtung ganz so wie §. 20. ausmitteln. Die Erfahrung hat gelehrt, dafs derselbe 0″,4 geschätzt werden kann, wenn auf Elimination der constanten Fehler gehörige Sorgfalt gewendet ist. Wenn also nun auf dem beiderseits sichtbaren Berge nächtliche Pulversignale gegeben werden, so würde nur nach n. 10 mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen in 0″,4 zu dividiren seyn, um den mittleren Fehler des endlichen Mittels für den Längenunterschied zu geben. — Gesetzt aber, wir wollen Tages-Signale durch Heliotrop-Blitze geben lassen, so kann ein Heliotrop nicht zu gleicher Zeit an beiden Orten gesehen werden, und wir müssen, um diese Schwierigkeit zu beseitigen, zwischen zwei verschiedenen Methoden wählen. Entweder wir lassen auf dem Signal-Berge zwei Heliotrope aufstellen, und damit genau gleichzeitige Blitze geben (wozu wir die Mittel haben); oder aber wir stellen auf dem Signal-Berge selbst neben einem Heliotrop noch einen zweiten Gehülfen mit einem Chronometer auf, welcher erst einen Blitz nach dem ersten Orte, und sodann einen Blitz nach dem zweiten Orte beobachtet, und setzen nun den Unterschied der Uhren der beiden Orte fest, indem wir die Unterschiede addiren, welche der Chronometer von den Uhren beider Orte zeigte. Welche von beiden Methoden ist nun die vortheilhafteste? — Die Antwort auf diese Frage

findet sich am Ende des vorigen §. Denn ist der mittlere Fehler einer Doppelbeobachtung zwischen einem der Orte und dem Chronometer auf dem Signal-Berge auch nur 0″,4 zu schätzen, so hat doch die Summe zweier solcher Doppelbeobachtungen erst das Gewicht $\frac{1}{2}$; demnach müssen nach der zweiten Methode an den Orten selbst doppelt so viel Beobachtungen angestellt werden, als bei Anwendung der ersten Methode nöthig waren, und zu jeder ist überdies noch eine Chronometer-Beobachtung anzustellen.

3) Der Längen-Unterschied zwischen *Göttingen* und *Mannheim* wurde in Ermangelung eines beiderseits sichtbaren Berges dadurch bestimmt, dafs ich in Pausen von 4′ abwechselnd Signale auf dem *Meisner* und auf dem *Feldberg* geben liefs, welche gleichzeitig von mir auf dem *Frauenberg* beobachtet wurden. Der Längen-Unterschied *Göttingen-Frauenberg* ergab sich aus 256 Doppelbeobachtungen, der Längen-Unterschied *Frauenberg-Mannheim* aus 136 Doppelbeobachtungen. Demnach hat das Resultat *Göttingen-Mannheim*, welches die Summe beider ist, nach n. 20 das Gewicht $\frac{136.256}{392} = 88{,}8$ und ist demnach so genau zu schätzen, als ob auf einem beiderseits sichtbaren Berge 89 Signale gegeben und beiderseits beobachtet wären.

§. 32.

Ganz eben so wie im §. 30. gelangen wir zu Bestimmung der Genauigkeit für die algebraische Summe von mehr als zwei Gröfsen. Wir haben nämlich erst wieder das Quadrat mm zu bilden, und uns zu erinnern, dafs die Producte $2\,m_1\,m_2$; $2\,m_1\,m_3$ u. s. w. wegen des doppelten Zeichens weggelassen werden müssen (was wir uns auch nöthigenfalls dadurch veranschaulichen können, dafs wir alle möglichen Combinationen, die durch diese Zeichen entstehen, ent-

wickelt und zu einem Mittel vereinigt denken, wobei sich dann nothwendig alle Producte dieser Art aufheben), so erhalten wir

$$m = \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2 + m_3 m_3 + \ldots}$$

d. h. nach unserer gewohnten Bezeichnung

n. 21. $$m = \sqrt{[mm]}.$$

Hieraus ergiebt sich dann wie oben

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots \text{ oder}$$

n. 22. $$\frac{1}{P} = \left[\frac{1}{p}\right]$$

n. 23. $$P = \frac{p_1 p_2 p_3 \ldots}{p_2 p_3 \ldots + p_1 p_3 \ldots + p_1 p_2 \ldots + \ldots}.$$

Für den besonderen Fall, dafs alle Beobachtungs-Gröfsen, deren Anzahl wir mit z_t bezeichnen wollen, mit gleicher Genauigkeit bestimmt, also $m_1 = m_2 = m_3 \ldots$ und auch $p_1 = p_2 = p_3 \ldots$ wären, haben wir also

$$m = m_1 \sqrt{z_t}$$
$$\frac{1}{P} = \frac{z_t}{p_1}.$$

Es braucht wohl nicht erinnert zu werden, dafs die Formeln des §. 30. als specielle Fälle der eben abgeleiteten zu betrachten sind.

§. 33.

Die letzten Formeln des vorigen §. enthalten den für die Praxis überaus wichtigen

Lehrsatz: Vorausgesetzt auch, dafs alle beobachteten Theile gleich genau seyen, nimmt doch, blofs durch die Zusammensetzung, die Genauigkeit der algebraischen Summe ab, wie die Quadrat-Wurzel aus der Anzahl der Theile zunimmt, und ist die Anzahl der, zum

Behufe gleicher Genauigkeit anzustellenden Beobachtungen proportional der Anzahl der Theile.

Sollte also z. B. eine solche Längen-Bestimmung, wie sie m §. 31. angeführt ist, zwischen *Mannheim* und *Paris* ıusgeführt werden, so müfste eine vorausgehende Recogıoscirung erst die dazwischen liegenden Signal- und Beobachtungs-Stationen ausmitteln, und zwar ganz besonders ınter dem Gesichtspunkte, dafs deren so wenig als möglich ıöthig würden. Denn die Zahl der zwischenliegenden Signal-Stationen giebt zugleich die Zahl der nachher zu addirenden Längenunterschiede. Vorausgesetzt nun, dafs diese alle gleich genau gefunden würden; so wären doch bei 4 Signal-Stationen schon über 350, bei 6 Signal-Stationen schon über 500 gelungene Doppel-Beobachtungen für jede nöthig, um dieselbe Genauigkeit zu haben, welche zwischen *Göttingen* und *Mannheim* statt findet.

Könnte man ferner einen Winkel nicht unmittelbar messen, sondern müfste ihn aus einzelnen Theilen zusammensetzen, wie dieses leicht vorkommt, wenn man z. B. in einem engen Thurmgebälk immer abwechselnd den Standpunkt ändern und centriren mufs; so ist es keineswegs gleichgültig, wie viel Theile man macht. Denn um den Winkel so genau zu erhalten, wie er aus einer einzelnen unmittelbaren Beobachtung zu erhalten wäre, müfste man jeden Theil so oft repetiren, als Theile gemacht sind.

Ein ähnlicher Fall kommt bei Basis-Messungen vor, wo wir unter übrigens gleichen Umständen lange Maafsstäbe für vortheilhafter halten müssen, als kurze.

Es läfst sich endlich auch leicht nachweisen, dafs es in solchen Fällen immer am vortheilhaftesten ist, wenn die Theile alle gleich genau sind. Denn sind die p verschieden, und nimmt man, da die Ordnung willkührlich

ist, p_1 für das gröfste, so läfst sich n. 22 auch auf die Form bringen:

$$\frac{1}{P} = \frac{zt}{p_1} + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) + \left(\frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_1}\right) + \left(\frac{1}{p_4} - \frac{1}{p_1}\right) + \ldots$$

$$= \frac{zt}{p_1} + \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2}\right) + \left(\frac{p_1 - p_3}{p_1 p_3}\right) + \left(\frac{p_1 - p_4}{p_1 p_4}\right) + \ldots$$

$\frac{1}{P}$ hat also seinen kleinstmöglichen und demnach P seinen gröfstmöglichen Werth $\left(= \frac{p_1}{zt}\right)$, wenn die dem $\frac{zt}{p_1}$ hinzugefügten positiven Glieder alle $= 0$ werden. Dagegen aber wird, wenn alle p bis auf eines gleich sind, dieses eine aber, welches p_n heifsen mag, namhaft kleiner als die übrigen ist, sich immer setzen lassen $p_n = \frac{p_1}{q}$, wo q einen Zahlen-Coefficienten vorstellt, welcher merklich gröfser ist als 1. Dann verwandelt sich aber $\frac{1}{P}$ in $\frac{zt + q - 1}{p_1}$ und P nimmt also im Verhältnifs $\frac{zt}{zt + q - 1}$ ab, gegen den Fall, wo alle p gleich wären.

Hieraus erkennen wir denn auch, wie ein entschieden weniger genauer Theil desto nachtheiliger einwirkt, je weniger Theile überhaupt sind, und wird es uns nicht mehr überraschen, dafs in dem ersten Beispiele des §. 31. unser P so unerwartet klein ausfiel, indem hier bei nur 2 Theilen das q über 4 war.

Vermeiden wir aber auch bei Theilungen, die wir in unserer Gewalt haben, und zu gewissen Zwecken absichtlich machen, die Verschiedenheit der p so viel irgend möglich, so dafs überall sehr nahe $q = 1$ wird; so bleibt es doch wegen $P = \frac{p_1}{zt}$ rathsam, die Anzahl der Theile so gering zu machen, als möglich.

Besonders finden diese Bemerkungen Anwendung bei dem Nivelliren. Dabei wird in der practischen Geometrie vorgeschrieben 1) wo irgend möglich immer aus der

fitte zu nivelliren, und es dabei in wichtigen Fällen so genau zu nehmen, dafs selbst die vorgängige Anfertigung eines Grundrisses und ein Abmessen (wenigstens Abschreiten) der Entfernungen, in denen man das Instrument und die Visirlatte aufstellen will, nicht gescheut werde. 2) Die Stationen so grofs zu nehmen, als es die Umstände irgend erlauben. 3) Die Stationen auch so viel als möglich unter einander gleich grofs zu nehmen.

Diese Vorschriften finden aufser den in der practischen Mefskunst abgehandelten Gründen, die sich auf Elimination der constanten Fehler u. s. w. beziehen, nun auch noch hier eine besondere Rechtfertigung in Rücksicht auf die unvermeidlichen Fehler; denn wir erhalten dadurch möglichst gleiche p und möglichst geringe z_t, also für das Endresultat ein möglichst grofses P. Aufserdem ist aber auch zu bemerken, dafs wir noch keineswegs über das Gesetz, wonach die mittleren Fehler mit den Distanzen zusammenhängen, so auf dem Reinen sind, dafs wir ihr Verhältnifs durch Rechnung immer mit Zuverlässigkeit schätzen könnten; (und besondere Experimente darüber zu machen, haben wir im Laufe der practischen Arbeiten doch in der Regel keine Zeit). Die verdienstlichen Untersuchungen, die über dies Gesetz angestellt sind, beziehen sich immer nur auf bestimmte einzelne Instrumente, und es bleibt in diesem Punkt, in ähnlicher Weise, wie in §. 18. erwähnt wurde, für einen Practiker, der Kenntnifs und Mufse dazu hat, sich solches Verdienst zu erwerben, gewifs noch recht Vieles zu thun übrig. — Halten wir uns aber an obige Vorschriften, so machen wir die so eben bemerkte Unkenntnifs möglichst unschädlich, indem wir die absoluten Gröfsen der mittleren Fehler wenigstens möglichst nahe gleich machen. — Es ist dieses überhaupt (unter Beziehung auf §. 8. und §. 18.) in allen den

Fällen, wo wir über die Beschaffenheit der mittleren Fehler nicht recht im Klaren sind, ein nützlicher Kunstgriff (der übrigens auch schon das practische Gefühl, nur in anderer Form lange vorgeschrieben hat), das Verhältnifs derselben möglichst nahe $= 1 : 1$ zu machen, wenn wir dieses in unserer Gewalt haben.

Noch ein anderer Umstand verdient hier erwähnt zu werden. Wir sind in der practischen Geometrie angewiesen, ein Nivellement, bei welchem die gröfste Sorgfalt nothwendig ist, wenigstens doppelt zu führen, auf verschiedenen Zügen, und aus den Resultaten, wenn sie nicht etwa zufällig ganz genau übereinstimmen, das Mittel zu nehmen. Insofern nun bei den verschiedenen Zügen der Stationen gleich viele und dieselben auch nahe gleich grofs waren, ist nichts weiter dabei zu erinnern und wir haben nach §. 12. zu rechnen. Sobald aber nur eine dieser Voraussetzungen wegfällt, müssen wir erst nach den Regeln des vorigen §. die P für die einzelnen Züge bestimmen und das Mittel dann so nehmen, wie im §. 23. gelehrt worden ist.

Es mag hier auch gelegentlich erwähnt werden, dafs es eine ähnliche Bewandtnifs mit den Markscheiderzügen hat, die zu Bestimmung von Gefällen dienen sollen. Nur kommen hierbei zu Festsetzung der Gewichte noch andere Rücksichten und complicirtere Rechnungen in's Spiel, als welche bis jetzt erklärt werden konnten. — Sind aber die Gewichte einmal festgestellt, so ist für das Mittel aus mehreren Zügen eben so zu rechnen, wie bei dem Nivelliren. — Mir ist ein Fall bekannt geworden, wo zu einem wichtigen Zweck ein Gefälle neunmal abgezogen wurde. Ein möglichst genaues Endresultat zu erhalten, hätte man also, nach später zu erklärenden Regeln, erst die neun verschiedenen P in Beziehung auf einerlei Gewichts-Einheit

bestimmen und sodann auch nach §. 23. rechnen müssen, indem die P an die Stelle der dortigen p getreten wären. — Die weitläufigen Rechnungen zu Bestimmung der P werden sich aber freilich nur dann lohnen, wenn wirklich der Fall sehr wichtig und mit ganz ungewöhnlicher Genauigkeit bearbeitet ist.

§. 34.

Gesetzt nun, es sey die Gleichung gegeben

$$u = a_{\text{I}} t_{\text{I}}$$

unter der Voraussetzung, dafs t_{I} durch Beobachtung gefunden und u daraus durch Multiplication mit einer bekannten Zahl zu berechnen wäre, oder dafs u ein bekanntes Vielfaches von dem beobachteten t_{I} sey.

Hier haben wir, unter Beibehaltung unserer bisherigen Bezeichnung

$$u \pm m = a_{\text{I}} t_{\text{I}} \pm a_{\text{I}} m_{\text{I}} \text{ also}$$

$$mm = a_{\text{I}} a_{\text{I}} m_{\text{I}} m_{\text{I}}$$

$$\text{n. 24.} \qquad m = \pm a_{\text{I}} m_{\text{I}}.$$

Nach unserer Definition ist aber

$$Pmm = P a_{\text{I}} a_{\text{I}} m_{\text{I}} m_{\text{I}} = p_{\text{I}} m_{\text{I}} m_{\text{I}} \text{ also}$$

$$\text{n. 25.} \qquad P = \frac{p_{\text{I}}}{a_{\text{I}} a_{\text{I}}}.$$

Wir bemerkten oben mit Fleifs, dafs wir nur den Fall im Auge hätten, wo das beobachtete t_{I} mit a_{I} multiplicirt werden soll. Der Coefficient a_{I} kann nämlich im Allgemeinen zwei Bedeutungen haben, entweder die eben angegebene, oder aber, er kann auch besagen, dafs t_{I} wiederholt addirt werden soll. Diese Bedeutungen mögen, theoretisch genommen, gleich seyn. In practischer Hin-

sicht und rücksichtlich auf unsere Genauigkeits-Bestimmung sind sie himmelweit verschieden. Denn tritt die letzte Bedeutung ein, so dafs also zu denken wäre, t_{I} sollte a_{I} mal hinter einander beobachtet und dann u aus den a_{I} einzeln beobachteten Theilen zusammengesetzt werden, so hätten wir nach n. 21 und 23 zu rechnen, und fänden also

$$m = \pm m_{\text{I}} \sqrt{a_{\text{I}}}\,; \quad P = \frac{p_{\text{I}}}{a_{\text{I}}},$$

d.h. die Genauigkeit des Endresultates wäre $\sqrt{a_{\text{I}}}$ mal gröfser als sie bei der Voraussetzung des Multiplicirens gewesen wäre.

Wir wollen nun, um diese Verschiedenheit recht in's Licht zu stellen, gleich bei unseren folgenden Rechnungs-Beispielen auch auf die zweite, eigentlich nicht hierher gehörige, Bedeutung des Coefficienten mit Rücksicht nehmen und nur noch hinzufügen, dafs in der Praxis auch Fälle vorkommen können, wo beide Rechnungsweisen mit einander zu verbinden sind und also Acht zu geben ist, dafs man nicht irrthümlich aus der einen in die andere gerathe. Wir werden auch davon späterhin noch ein Beispiel bekommen.

§. 35.

1) Zum ersten Rechnungs-Beispiel setzen wir den Fall, es soll eine gerade Linie willkührlich angenommen, und hernach mit einem gegebenen Maafsstabe gemessen werden. Vor allem kommt es hier darauf an, auszumitteln mit welcher Genauigkeit wir mit dem Maafsstabe messen d.h. ihn mit einer anderen, ihm nahe gleichen, geraden Linie vergleichen können. Gesetzt, dies sey auf irgend eine Weise zu Stande gebracht, und neben der Länge des Maafsstabes auch der mittlere Fehler m_{I} aufgefunden, den wir begehen, wenn wir eine Länge ihm gleich finden. — Die Li-

ie, welche wir messen sollen, ist aber noch willkührlich nzunehmen. — Glaubte nun ein Practiker, dem die Aufabe vorläge, Mittel zu besitzen, um eine gegebene gerade inie mit Leichtigkeit, und mit einer an absolute Schärfe ränzenden Genauigkeit zu halbiren, so könnte er wohl auf en Gedanken kommen, der Linie gerade eine solche Länge u geben, dafs sie sehr nahe eine Potenz von 2 in Beziung auf den Maafsstab vorstellte; sie also z. B. 32 mal so ng zu machen, und ihre Länge dann zu finden, indem er en durch Halbirung gewonnenen Theil mit dem Maafsstabe näfse, und dann den gefundenen Werth mit 32 multiplirte. Gesetzt nun, wir theilten auch ganz seinen Glauben ber die Vortrefflichkeit seiner Halbirungs-Mittel, so müfsen wir ihm doch entschieden abrathen, diese Methode anuwenden; denn er bekommt dadurch nach n. **24** und **25**

$$m = 32\,m_{\text{I}}\,; \quad P = \frac{p_{\text{I}}}{1024},$$

att dafs er durch das gewöhnliche Durchmessen aller Theile nd Addiren nach n. **21** u. **23** bekommen hätte

$$m = \sqrt{32}\cdot m_{\text{I}} = 5{,}65\,m_{\text{I}} \text{ und } P = \frac{p_{\text{I}}}{32}.$$

r würde also den etwanigen Zeit-Gewinn mit einer Aufpferung von mehr als $\frac{4}{5}$ der erreichbaren Genauigkeit eraufen.

2) Als zweites Beispiel nehmen wir an, es sollte ein oll-Centner (= 50 Kilogramm) dargestellt werden, und äre uns dazu gegeben: ein Normal-Kilogramm und ein enigstens centnerschwerer Satz anderer Gewichte, welchen ir in allen seinen Abtheilungen als absolut genau anzunehnen ermächtigt würden. — In solchen Fällen ist immer ie Darstellung eines Gewichtes (d. h. die Zusammenlegung

gewisser vielleicht ganz willkührlicher Gewichtssteine, welche zusammen ein gegebenes Gewicht aufwiegen) und die Copirung des dargestellten Gewichts, d. h. die Anfertigung eines gleichschweren Gewichtssteines, zu unterscheiden. — Wir fragen hier jetzt fürs erste blofs nach der Darstellung.

Um die Genauigkeit der Arbeit zu berechnen, müfste wir nun entweder vorauswissen, oder durch Versuche ermitteln, mit welcher Genauigkeit wir das Kilogramm darstellen könnten. Der mittlere Fehler, der dabei zu befürchten ist, heifse m_1. — Sodann sehen wir gleich, dafs wenn wir von der uns gegebenen Ermächtigung vollständigen Gebrauch machen wollen, wir durch Multiplication des durch den mitgetheilten Gewichts-Satz dargestellten Kilogrammes mit 50 das Gewicht finden, welches zusammengelegt den verlangten Zoll-Centner darstellt. Zugleich aber sehen wir aus n. 24, dafs der mittlere Fehler $50\,m$ beträgt. — Machen wir uns aber von jener Voraussetzung frei, indem wir die Mühe nicht scheuen, die Operation des Darstellens eines Kilogrammes 49 mal zu wiederholen, so erhalten wir durch Zusammenlegen aller einzelnen Darstellungen des Kilogrammes mit dem Normalkilogramme die Darstellung des Zoll-Centners, und zwar nach n. 21 mit dem mittleren Fehler $7m$. Wir erlangen also durch unsere vermehrte Arbeit eine mehr als 7fache Genauigkeit; selbst in dem Falle, dafs die obige Voraussetzung über den mitgetheilten Gewichtssatz ganz unzweifelhaft gegründet wäre. — Zu diesem Urtheile hätten wir aber auch schon ohne Kenntnifs des m_1 blofs durch Vergleichung der beiden Gewichte $\frac{p}{2500}$ und $\frac{p}{49}$ kommen können.

§. 36.

Das Vorhergehende enthält nun eigentlich schon die uflösung der Aufgabe: für jede lineare Function mehrerer eobachtungs-Gröfsen

$$u = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \ldots .$$

ie Genauigkeit anzugeben; wobei wir zum Ueberflusse noch nmal bemerken, dafs die a wieder Coefficienten vorstel- n, mit welchen multiplicirt werden soll.

Wir bekommen nämlich, wenn wir unsere bisherige Be- eichnung beibehalten, und eben so wie in den §§. 30. 32. id 34. verfahren, auch uns vergegenwärtigen, dafs Pro- ucte von der Form $2a_1a_2m_1m_2$ aus den dort mitgetheil- n Gründen hier gleichfalls wegzulassen sind, unmittelbar e Gleichungen:

n. 26. $$m = \sqrt{[aa\,mm]},$$

n. 27. $$\frac{1}{P} = \left[\frac{aa}{p}\right],$$

n. 28. $$P = \frac{p_1 p_2 p_3 \ldots}{a_1a_1\, p_2p_3 \ldots + a_2a_2\, p_1p_3 \ldots + a_3a_3\, p_1p_2 \ldots}.$$

Wir erkennen auch leicht, dafs sich die früheren Fälle f den gegenwärtigen allgemeinen zurückführen lassen, und ollen, ehe wir zu Beispielen übergehen, nur noch den sonderen Fall in's Auge fassen, wo $m_1 = m_2 = m_3 \ldots .$ id also auch $p_1 = p_2 = p_3 \ldots .$ ist. Tritt dieser Fall n, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$m = m_1\sqrt{[aa]}$$
$$\frac{1}{P} = \frac{[aa]}{p_1}.$$

Auch diese Gleichungen führen offenbar auf die früher r den besonderen Fall mitgetheilten zurück. Wir werden is noch öfter daran zu erinnern haben, können aber schon tzt aus ihnen eine wichtige practische Regel ziehen. Wenn

wir es nämlich in unserer Gewalt haben, das u auf verschie
denen Wegen aus gemessenen t, also z. B. das erstemal au
$t_1\ t_2\ t_3$, das zweitemal aus $t_2\ t_4\ t_6$ u. s. w. zu berechnen, un
die t alle gleich genau bestimmt werden können, so habe
wir uns erst über die dabei zum Gebrauche kommenden a z
unterrichten, und dann denjenigen Weg einzuschlagen, de
das kleinste $[aa]$ giebt. Ein specieller Fall, wo diese Re
gel zur Anwendung kam, ist auch schon im §. 33. da gewe
sen, als wir anriethen, unter übrigens gleichen Umständen
möglichst wenig Theile zu machen. Damals war nämlic
$[aa] = z_t$.

§. 37.

Zum Behufe unserer Rechnungs-Beispiele wol
len wir setzen:

1) In einem Bergwerke sey ein Punkt durch recht
winklige Coordinaten x, y, z, in Beziehung auf eine hori
zontale Ebene und einen bestimmten Anfangspunkt der Co
ordinaten gegeben. Durch den Anfangspunkt der Coordi
naten gehe nun eine schiefe Ebene, und es werde verlang
aus den Coordinaten die Tiefe S eines Schachtes zu berech
nen, der von dem gegebenen Punkt aus nach der gegebene
schiefen Ebene hin abgeteuft werden soll. Die Rechnun
geht hier bekanntlich nach einer Gleichung von der Form

$$S = a_1 x + a_2 y + z,$$

in welcher a_1 und a_2 gewisse Zahlen-Coefficienten sind, di
sich aus der bekannten Lage der Ebene ergeben, deren Be
stimmung wir hier zur Abkürzung als absolut genau voraus
setzen wollen. Um aber die Genauigkeit zu finden, mi
welcher sich S auf diese Weise bestimmt, mufs erst eine be
sondere Untersuchung vorausgehen über die mittleren Feh

er, die bei x, y, z anzunehmen sind. Dies erfordert zwar
i dem besonderen Falle gewöhnlich auch wieder ziemlich
eitläufige Rechnungen, die wir noch dazu erst im Folgen-
en werden kennen lernen. Wir setzen aber voraus, es
eyen die mittleren Fehler der Coordinaten m_1 m_2 und m_3
efunden. Hier müssen wir sodann nach n. 26 rechnen, und
rhalten also:

$$m = \sqrt{a_1 a_1 m_1 m_1 + a_2 a_2 m_2 m_2 + m_3 m_3}.$$

2) Wir wollen nun ein Beispiel vornehmen, bei wel-
hem man irrthümlich die Formeln des vorigen §. anzuwen-
en verleitet seyn könnte, statt dafs nach der Methode des
. 32. zu rechnen ist; weil die Coefficienten nur Wiederho-
ungen einzelner Beobachtungen, nicht Multiplicationen von
en Zahlen-Werthen, die durch die Beobachtungen gefun-
en sind, anzeigen.

Sey also eine Mefskette von 5 Ruthen so eingerichtet,
afs sie bei der dritten Ruthe aus einander genommen wer-
en kann, um bei schwierigem Boden eine dreiruthige oder
ine zweiruthige zu geben. Die Kette sey nun zuerst nach
em Normal-Maafse im Ganzen und in allen ihren Thei-
n genau berichtigt, und es seyen sodann durch besondere
ersuchs-Reihen die mittleren Fehler bestimmt, welche bei
nwendung der fünfruthigen, dreiruthigen und zweiru-
igen Kette zu befürchten sind. Wir wollen annehmen, es
y durch diese Versuche gefunden:

$t_1 = 0{,}01$ Ruthe für die 5ruthige, die wir t_1 nennen wollen
$t_2 = 0{,}01$ - - - 3ruthige - - t_2 - -
$t_3 = 0{,}02$ - - - 2ruthige - - t_3 - -

So ungefähr glaubte nämlich ein geübter Landmesser,
er ehemals mein Zuhörer war, die mittleren Fehler etwa

schätzen zu können, denn, wie schon erwähnt, eine besondere Untersuchung darüber haben wir noch nicht.

Nun sey eine Linie u von 106 Ruthen über einen Hügel gemessen, und zwar nach unserem Meſsbuche zuerst 40 Ruthen mit t_1, dann 10 Ruthen mit t_3, hierauf 21 Ruthen mit t_2, und zuletzt wieder 35 Ruthen mit t_1. Wir verlangen nun zu wissen, welcher Fehler in der Linie zu fürchten ist. Hier ist freilich

$$u = 15t_1 + 7t_2 + 5t_3,$$

unser m dürfen wir aber nicht nach der Formel n. 26 berechnen, denn wir haben das t_1 wirklich 15 mal beobachtet und diese Beobachtungen addirt u. s. w. Wir müssen also vielmehr die Formel n. 21 anwenden, und erhalten so:

$$m = \sqrt{15m_1m_1 + 7m_2m_2 + 5m_3m_3},$$

d. h. wenn wir die obigen Werthe für m_1 u. s. w. einführen

$$m = 0{,}06 \text{ Ruthen}.$$

3) Zuletzt wollen wir nun auch noch ein Beispiel vornehmen, in welchem beide Rechnungs-Weisen, nach n. 26 und n. 21, gemischt vorkommen. Ich wähle dazu einen Satz hölzerner Maafsstäbe, den ich mir zum Behufe von Local-Triangulirungen selbst angefertigt habe. Er stellt 6 Toisen vor; und sind in ihm fünf Maafsstäbe wirkliche Toisen, ein Maafsstab enthält sodann $\frac{1}{2}$ Toise, einer enthält 2 Fufs, und noch einer 1 Fufs. — Diese Maafsstäbe wurden nun zuvörderst mittelst eines Fühlhebels mit einer beglaubigten Copie der Toise von Peru genau verglichen, und zwar durch wiederholte Messungen, so dafs sich für jeden nicht nur seine Correction fand, sondern auch der mittlere Fehler, der bei einer jeden einzelnen solchen Bestimmung zu fürchten blieb. Bezeichnen wir die grofsen Maafsstäbe mit t, die

leinen mit τ, die mittleren Fehler mit m und μ, so hatte liese Arbeit gegeben:

$t_1 = 1$ Toise	$+ 0{,}0156$ pariser Linie		$m_1 = 0{,}0008$
$t_2 = 1$ -	$+ 0{,}0302$ -	-	$m_2 = 0{,}0006$
$t_3 = 1$ -	$+ 0{,}0075$ -	-	$m_3 = 0{,}0010$
$t_4 = 1$ -	$+ 0{,}0030$ -	-	$m_4 = 0{,}0006$
$t_5 = 1$ -	$+ 0{,}0205$ -	-	$m_5 = 0{,}0023$
$\tau_1 = 3$ Fufs	$- 0{,}045$ -	-	$\mu_1 = 0{,}0003$
$\tau_2 = 2$ -	$+ 0{,}002$ -	-	$\mu_2 = 0{,}0002$
$\tau_3 = 1$ -	$+ 0{,}001$ -	-	$\mu_3 = 0{,}0001$.

Wenn nun mit diesen Stäben gemessen werden soll, so egt man erst t_1 an den Anfangspunkt, t_2 an t_1 u. s. w. und immt endlich t_1 ab, um ihn an t_5 zu legen; bis man gegen Ende der Linie genöthigt ist, einen oder zwei von den τ anulegen. Den Rest der Linie, der dann kleiner ist als 1 Fufs, nifst man endlich nach bekannten Methoden für solche Fälle n einem Transversal-Maafsstabe. — Es kommen also auser den obigen m und μ noch zweierlei andere Fehler in Betracht; a) der Fehler, welcher sich bei jeder Anlage eines Maafsstabes in der festeren oder lockerern Berührung wielerholt. Er mag λ heifsen. Ich schätze höchstens $\lambda = 0{,}01$;) der Fehler, welcher bei dem Anlegen am Anfangspunkte nd dem Messen des letzten Restes am Endpunkte begangen wird, und ν heifsen mag. Diesen schätze ich aller mindetens zu $\nu = 0{,}15$.

Ist nun eine bestimmte Linie mit den Maafsstäben genessen, so kann ich aus ihrer Länge gleich sehen, wie oft jeder Maafsstab in der Linie gewesen ist, und wie oft angelegt ist. Also z. B. bei einer Linie $>$ 12 Toisen 5 Fufs $<$ 13 Toisen ist t_1 und t_2 dreimal angelegt, t_3; t_4; t_5 sind zweimal angelegt, τ_1 und τ_2 sind einmal angelegt. Mit den

Quadraten dieser Zahlen sind nun nach n. 26 die Quadrate der entsprechenden m und μ zu multipliciren. Ehe wir aber addiren und die Wurzel ausziehen, müssen wir uns erinnern, dafs sich der Fehler, für den wir im Mittel λ setzen wollten, bei jeder Anlage wiederholt; wir haben also nach n. 21 noch so oft $\lambda\lambda$ zu addiren, als Anlagen überhaupt statt gefunden haben, d. h. also in unserem bestimmten Beispiele noch 13 $\lambda\lambda$, weil in allem 14 Stäbe zum Gebrauche kamen. Endlich wäre noch vv zu addiren und dann erst die Wurzel auszuziehen. — Wir bekämen so am Ende für die Genauigkeit unserer gemessenen Linie:

$$mm = \{9(0{,}0008)^2 + 9(0{,}0006)^2 + 4(0{,}0010)^2 + 4(0{,}0006)^2 + 4(0{,}0023)^2 + (0{,}0003)^2 + (0{,}0002)^2 + 13(0{,}01)^2 + (0{,}15)^2\}.$$

Also $m = 0{,}1543$.

Wir erkennen hieraus, dafs die Fehler, welche bei der Bestimmung der Maafs-Stab-Correctionen durch den Fühlhebel und bei den Berührungen der Stäbe noch etwa übrig bleiben, in unserem Falle verhältnifsmäfsig gegen den unvermeidlichen Fehler am Anfange und Ende ohne allen erheblichen Einflufs auf das Endresultat waren, und dafs wir jene also auch recht wohl hier noch hätten $= 0$ setzen dürfen.

Wir sehen ferner, dafs dieser Einflufs mit der Länge der gemessenen Linien zwar wächst, dafs aber bei so kleinen Linien, als welche uns bei Local-Triangulirungen vorkommen, von höchstens etwa 20 bis 30 Toisen, noch immer diese Art Fehler vernachlässigt werden können, so lange wir nicht genauere Mittel anzuwenden vermögen, um die Anfangs- und Endpunkte zu bestimmen; d. h. mit anderen Worten, so lange wir nicht die Winkel-Instrumente, wel-

he wir hier aufstellen wollen, microscopisch centriren kön-
ıen. Mit Rücksicht auf diesen letzten, oben noch nicht er-
vähnten, Umstand dürfte unser v sogar mitunter zehnmal
o grofs seyn, als oben angenommen.

Wir erkennen endlich nun auch den Grund, weshalb
lie practische Geometrie so ernstlich darauf dringt: bei Fest-
tellung der Maafsstab-Correctionen, selbst in solchen Fäl-
en, wo nur Local-Triangulirungen damit bezweckt wer-
ten, mit aller Sorgfalt zu Werke zu gehen; denn wir ha-
ıen uns eben jetzt überzeugt, dafs die Fehler, die wir hier-
ıei begehen, im quadratischen Verhältnisse der Anlags-
:ahl wirken, und dafs die Arbeit, die wir bei solcher ge-
ıauen Feststellung in der Stube machen, sich hernach im
'elde reichlich wieder belohnt.

§. 38.

Wir können nun zu der allgemeinen Aufgabe überge-
ıen: die Genauigkeit von u zu schätzen, wenn u eine be-
iebige bekannte Function von den beobachteten Gröfsen
$_1$; t_2; t_3 .... ist, welchen wir die mittleren Fehler m_1; m_2;
m_3 .... beilegen. Die Auflösung läfst sich jedesmal durch
das Differentiiren einer gegebenen Gleichung vermitteln. —
Wir erinnern uns nämlich, dafs wir von Anfang herein (§. 1.
und §. 5.) als wesentliche Bedingung unserer Untersuchung
vorausgesetzt haben, dafs nur unvermeidliche Fehler dabei
in Betracht kommen, welche gegen die Gröfsen, die wir
messen, als verschwindend oder unendlich klein zu betrach-
ten sind. Demnach müssen wir, nach bekannten, hier nicht
weiter zu erörternden, Grundsätzen, diese Fehler und somit
auch die mittleren Fehler der beobachteten Gröfsen als Dif-
ferentiale, d. h. in so kleinen Zahlenwerthen ausgedrückt
denken, dafs deren höhere Potenzen vernachlässigt werden

können. — Haben wir nun auch den allgemeinsten Fal $0 = F(u; t_1; t_2; t_3 \ldots)$, so mufs uns die partielle Differentiation immer dahin führen, du in einer linearen Gleichung durch $dt_1; dt_2; dt_3 \ldots$ auszudrücken; und sind einmal die Coefficienten dieser Gleichung bestimmt, so brauchen wir nur $du = \pm m; dt_1 = \pm m_1; dt_2 = \pm m_2$ u. s. w. zu setzen, um ganz auf unsere vorigen Formeln des §. 37. zurückzukommen.

Sind nämlich die partiellen Differential-Quotienten $\left(\frac{du}{dt_1}\right) = l_1; \left(\frac{du}{dt_2}\right) = l_2; \left(\frac{du}{dt_3}\right) = l_3 \ldots$ erst in allgemeinen Formen gefunden, und sind in diesen Formen die speciellen Zahlen-Werthe substituirt, welche bei den t beobachtet, bei u berechnet wurden, so ergiebt sich bekanntlich

$$du = l_1 dt_1 + l_2 dt_2 + l_3 dt_3 + \ldots.$$

wo $l_1; l_2; l_3 \ldots$ ganz bestimmte Zahlen-Coefficienten sind. Denken wir also die ursprüngliche Gleichung $0 = F(u; t_1; t_2; t_3 \ldots)$ umgeformt in eine andere $u = f(t_1; t_2; t_3 \ldots)$, worin sich u entwickelt darstellt, wenn wir auch solche Umformung nicht wirklich ausführen, so mufs seyn

$$u + du = f(t_1, t_2, t_3 \ldots) + l_1 dt_1 + l_2 dt_2 + l_3 dt_3 + \ldots.$$

folglich auch $\pm m = \pm l_1 m_1 \pm l_2 m_2 \pm l_3 m_3 \pm \ldots$.
und also nach öfters vorgetragenen Regeln

$$mm = l_1 l_1 m_1 m_1 + l_2 l_2 m_2 m_2 + l_3 l_3 m_3 m_3 + \ldots$$

n. 29. $$m = \sqrt{[llmm]},$$

n. 30. $$\frac{1}{P} = \left[\frac{ll}{p}\right].$$

Dies sind im Grunde ganz wieder unsere früheren Formeln n. 26 und 27 nur mit dem Unterschiede, dafs die dortigen a als uns von vorn herein bekannt und gegeben be-

achtet wurden, statt dafs wir hier unsere l uns erst durch Differentiation und Substitution selbst machen müssen. Offenbar haben wir auch, wenn die Genauigkeit der beobachteten Gröfsen als gleich geschätzt werden kann, gleich wieder die besonderen Gleichungen (welche wir zu künftigem Gebrauche doch uns hier numeriren wollen):

$$\text{n. 31.} \qquad m = m_1 \sqrt{[uu]},$$

$$\text{n. 32.} \qquad \frac{1}{P} = \frac{[uu]}{p_1}.$$

Wir erkennen nun auch gleich, dafs alle unsere früheren Formeln, von n. 18 an, sich aus n. 29 und 30 ableiten lassen und dafs wir also auch sehr wohl berechtigt gewesen wären, die Untersuchungen dieses Kapitels mit der gegenwärtigen allgemeinen Aufgabe anzufangen und alles Vorhergehende als specielle Fälle daran zu knüpfen. Wir machten aber von dieser Berechtigung keinen Gebrauch, sondern schlugen hier den weitläufigeren synthetischen Weg ein, um nach unserem Plane auch solchen Lesern, die sich hier zuerst mit dieser Materie bekannt machen, durch Voranstellung der einfacheren Fälle das Eingehen in die Sache zu erleichtern.

Wenn wir übrigens sagten, wir müfsten uns die l durch Differentiiren und Substituiren selbst machen, so soll damit nicht gesagt seyn, dafs andere Mittel zur Kenntnifs der l zu gelangen ausgeschlossen seyen. Schaffen wir diese Kenntnifs nur herbei, so sind die Mittel dazu für unseren Zweck gleichgültig und wir werden immer die bequemsten zu wählen haben. Nur da, wo uns bequemere Mittel fehlen, mufs uns das angegebene, wenn auch auf weitläufigem Wege, immer sicher zum Ziele führen. — Unser folgendes Rechnungs-Beispiel wird dies schon erläutern.

§. 39.

Wir setzen zum Rechnungs-Beispiele den Fall es stehe im Punkte A ein Signal, dessen Spitze auf den Bo- den abgelöthet wäre. Wir sollen den horizontalen Abstand eines Standpunktes B von diesem Signale messen, ohne die gerade Linie frei zu haben, so dafs wir in B nur die Spitze des Signales über A sehen, aber nicht in gerader Linie hin- gelangen können. Wir suchen also einen dritten von A aus zugänglichen Punkt C, in welchem wir A und B sehen kön- nen und messen die Linie AC, die wir in unserer gewohn- ten Bezeichnung b nennen wollen. — Die Umstände sind aber sehr ungünstig, denn nicht nur geht es bei dieser Li- nienmessung über sehr ungünstigen Boden weg, sondern es steht uns auch nur ein schlechtes Winkel-Instrument zu Ge- bote, dessen mittleren Fehler bei einfacher Messung wir nach früheren Erfahrungen auf 2′ schätzen müssen. — Die Linie $AC = b$ sey nun nach unserem zweiten Beispiele §. 37 gefunden zu 106 Ruthen, mit dem mittleren Fehler 0,06 Ruthen. Den Winkel in B repetiren wir viermal, er sey $= 29°39'$. Nun müssen wir aber, weil Unwetter droht, eilen noch den Winkel C zu messen und uns hier mit einer einfachen Messung begnügen, welche uns $C = 120° 7'$ giebt. — Aus diesen ungünstigen Beobachtungen müssen wir nun unsere Linie $AB = c$ nach der Formel $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$ berechnen, wodurch wir $c = 185{,}35$ Ruthen erhalten. — Wir fragen aber mit Recht, ehe wir diesen Werth weiter gebrauchen, nach seiner Genauigkeit, die voraussichtlich sehr gering seyn wird.

Nach der Bezeichnung des vorigen §. ist also $c = u$ mit dem noch zu findenden mittleren Fehler m, und ferner ist:

$t_1 = b = 106$ Ruthen $\quad m_1 = 0{,}06$ Ruthen
$t_2 = B = 29°39'$ $\quad m_2 = 1'$ nach n. 15
$t_3 = C = 120°7'$ $\quad m_3 = 2'$.

Wir müssen nun unsere l_1; l_2; l_3 aufsuchen und also zuerst die Gleichung $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$ differentiiren, die sich hier schon entwickelt darstellt, statt dafs wir sonst auf weitläufigerem Wege aus $0 = c \sin B - b \sin C$ oder $\frac{c \sin B}{b \sin C} = 1$ auch dasselbe finden müfsten.

Die Differentiation giebt uns zunächst

$$dc = \frac{\sin C}{\sin B} db - c \cotang B dB + c \cotang C dC.$$

In dieser Formel stellt db eine Zahl vor, die einer kleinen Linear-Gröfse angehört, dB und dC aber stellen abstracte Zahlen vor, welche kleine Bögen in Theilen des Halbmessers ausdrücken. Wollen wir also dB und dC uns durch Minuten ausgedrückt denken, was bei der Form unserer m_1 und m_2 bequemer ist, weil wir sie sonst erst in Theile des Halbmessers umsetzen müfsten, so haben wir noch den Factor $\frac{60}{\varrho}$ einzuführen und erhalten also:

$$l_1 = \frac{\sin C}{\sin B} = +1{,}749; \quad l_1 l_1 = 3{,}059001$$
$$l_2 = -\frac{60 \cdot c \cdot \cotg B}{\varrho} = -0{,}095; \quad l_2 l_2 = 0{,}009025$$
$$l_3 = \frac{60 \cdot c \cdot \cotg C}{\varrho} = -0{,}031; \quad l_3 l_3 = 0{,}000961.$$

Führen wir nun endlich diese Werthe in unsere Formel n. 29 ein, indem wir $m_1 = 0{,}06$; $m_2 = 1$ und $m_3 = 2$ setzen, mit Weglassung ihrer Benennungen, so erhalten wir endlich:

$$m = 0{,}15$$

und können also beurtheilen, ob die für c erhaltene Bestimmung, bei welcher ein Fehler von 0,15 Ruthen zu fürchten

ist, für den besonderen Zweck, welchen wir dabei hatte noch genau genug war oder nicht.

Wir hätten aber in diesem Falle viel bequemer unser l ohne Differentiation und Substitution erhalten könne wenn wir gleich bei der Berechnung von c die logarithmi schen Differenzen mit benutzt hätten, wie wir das in de Praxis ja ohnehin bei vielfältigen Gelegenheiten mit Nutze zu thun gewohnt sind. — Dann hätte unsere ganze Rech nung so gestanden:

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}02531 + 409{,}5\, \mathrm{d}b \\ C \log \sin B &= 0{,}30566 \qquad\qquad - 22\, \mathrm{d}B \\ \log \sin C &= 9{,}93702 \qquad\qquad\qquad\qquad - 7\, \mathrm{d} \\ \hline \log c &= 2{,}26799 + 409{,}5\, \mathrm{d}b - 22\, \mathrm{d}B - 7\, \mathrm{d} \\ c &= 185{,}35 + \tfrac{409{,}5}{234}\, \mathrm{d}b - \tfrac{22}{234}\, \mathrm{d}B - \tfrac{7}{234} \mathrm{d} \end{aligned}$$

Hier hätten wir also $l_1 = +1{,}750$

$l_2 = -0{,}094$ u. daraus $m = 0{,}15$ w. ob.

$l_3 = -0{,}030$

Dafs die l nicht in beiden Methoden ganz genau übereir stimmen, (obwohl die Uebereinstimmung noch immer vi genauer ist, als wir sie für unseren Zweck bedürfen), wir Niemand befremden, welcher die nur näherungsweise rich tigen Voraussetzungen erwägt, die darin, namentlich in d letzten, liegen. Im Gegentheile wird der Practiker aus die sem Beispiele, bei welchem absichtlich so überaus ungün stige Umstände angenommen wurden, wie sie wohl nur se ten zusammentreffen, ermessen, wie sicher ihn dieses Ver fahren unter vortheilhaften Verhältnissen zum richtigen Ur theil über die Genauigkeit seines Resultates führen mufs.

Hätten wir in unserem vorliegenden Falle noch irgen ein Interesse dabei gehabt, zu untersuchen, wie genau d dritte Winkel ($A = 30^\circ 14'$) bestimmt sey; so fänden wir vo

$A = 180° - B - C$ ausgehend

$l_1 = -1;\ l_2 = -1,$

lso nach n. 29

$$m = \sqrt{5} = 2',236 = 2'14''.$$

§. 40.

Das letzte Beispiel giebt eine passende Gelegenheit, och zum Schlusse dieses Kapitels, eine Auseinandersetzung ber einen Umstand beizufügen, der im Allgemeinen schon mer gelegentlich erwähnt ist, aber erst hier noch einmal esonders eingeprägt zu werden verdient, weil er uns später- in noch öfters vorkommen wird, wo es denn gut ist, wenn ir nur hierher zu verweisen brauchen.

Fragen wir nämlich, wie wir im vorigen §. zu rechnen ehabt hätten, wenn wir nicht n. 29, sondern n. 30 hätten nwenden wollen, so zeigt sich in der letzten Rechnung für ! ohne alle Schwierigkeit, dafs wir in Beziehung auf die nfache Winkelbeobachtung als Gewichts-Einheit zu setzen ätten $p_1 = 4$ und $p_2 = 1$; woraus also nach n. 30 wird $\frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{5}{4}$ und sich dann nach n. 15 wieder findet $= 2'\sqrt{\frac{5}{4}} = 2'14''$ wie vorher. — Hätten wir aber die erfache Beobachtung zur Gewichts-Einheit erwählt, so hät- n wir setzen müssen, $p_1 = 1$; $p_2 = \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{P} = 1 + 4 = 5$ nd wieder $m = 1'\sqrt{5} = 2'14''$ wie vorher.

In dem ersten Falle, wo wir c suchten, scheint dage- en die Einführung der Gewichte mit einiger Schwierigkeit rbunden, weil die beobachteten Gröfsen heterogen sind. ieser Schein verschwindet aber bei näherer Ueberlegung. — Wir hatten nämlich durchweg in diesem Kapitel früherhin ur solche Beispiele, in welchen homogene Beobachtungs- röfsen vorkamen, und konnten also bisher ohne Schaden

vergessen, dafs wir nicht mit den mittleren Fehlern selbst, sondern mit den unbenannten Zahlen, wodurch sie ausgedrückt sind (vergl. §. 8.), rechnen sollen. — Wenn uns nun jetzt ein Fall mit heterogenen Gröfsen vorkommt, so müssen wir uns also erst wieder erinnern, dafs es bei den mittleren Fehlern und Gewichten nicht auf das Verhältnifs concreter Gröfsen, sondern auf das Verhältnifs unbenannter Zahlen ankommt, wodurch concrete Gröfsen ausgedrückt sind. Demnach ist als Gewichts-Einheit jede Beobachtung brauchbar, deren mittleren Fehler wir durch die unbenannte Einheit darzustellen beschlossen haben; gleichviel, ob dieselbe in dieser oder jener concreten Einheit ursprünglich erhalten war.

Beschliefsen wir also z. B. bei unserem obigen Dreiecke die Beobachtung von B zur Gewichts-Einheit für Winkelbeobachtungen zu nehmen, weil uns da gerade die unbenannte Zahl 1 am nächsten liegt, so haben wir damit von selbst schon stillschweigend festgesetzt, dafs wir als Gewichts-Einheit für alle Linien-Messungen eine solche setzen wollen, welche eine ganze Ruthe mittleren Fehler hat. Ja wir hätten eigentlich, streng genommen, schon vom Anfang an nicht schreiben dürfen

$$m_1 = 0{,}06 \text{ Ruthen}, \text{ sondern nur } m_1 = 0{,}06$$
$$m_2 = 1 \text{ Minute}, \quad - \quad - \quad m_2 = 1$$
$$m_3 = 2 \text{ Minuten}, \quad - \quad - \quad m_3 = 2,$$

und wenn wir nun am Ende für unser c gefunden haben $m = 0{,}15$; so dürfen wir nur deshalb dieses wieder aussprechen: „c hat 0,15 Ruthen mittleren Fehler", weil zu der für c gefundenen Zahl 185,35 die Ruthe als concrete Einheit gehört.

Diesem gemäfs haben wir auch oben im Grunde schon

gerechnet, ohne besonders daran zu denken, indem wir den Factor $\frac{60}{\varrho}$ in unsere Differentialgleichungen einführten und nun hernach die Benennungen der mittleren Fehler wegliefsen.

Berechnen wir unser Beispiel nun also nach n. 30, so ist nach dem eben Vorgetragenen zu setzen

$$p_1 = \frac{1}{(0{,}06)^2}; \quad p_2 = 1; \; p_3 = \tfrac{1}{4}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{p_1} = 0{,}0036; \; \frac{1}{p_2} = 1; \; \frac{1}{p_3} = 4,$$

demnach $\frac{1}{P} = \left(\frac{ll}{p}\right) = 0{,}023881,$

und endlich nach n. 15 wieder $m = \sqrt{0{,}023881} = 0{,}15$ mit der Benennung „Ruthen" wie oben.

Hätten wir aber vorgezogen, für die Winkel-Beobachtungen als Gewichts-Einheit diejenige Beobachtung zu wählen, welche mit unserer dermaligen einfachen Winkel-Beobachtung gleiche Genauigkeit hätte; so wäre damit auch zugleich stillschweigend festgesetzt, dafs wir für die Längenmessungen eine solche als Gewichts-Einheit setzen wollen, welche zwei volle Ruthen mittleren Fehler zeigte. Demnach würde

$p_1 = \frac{4}{(0{,}06)^2}; \; p_2 = 4; \; p_3 = 1; \; \frac{1}{P} = 0{,}005970$ und

endlich wieder $m = 2\sqrt{0{,}005970} = 0{,}15$ Ruthen, wie bisher.

Es hat nun für den Practiker eine Härte, sich als Gewichts-Einheit der directen Längen-Messungen eine solche zu denken, bei welcher eine oder gar zwei Ruthen mittlerer Fehler zu fürchten ist, weil dergleichen Messungen im täglichen Leben nicht vorkommen. Diesem Uebelstande, welcher übrigens auf die Richtigkeit des Resultates ohne allen Einflufs ist, können wir aber leicht abhelfen, wenn wir uns nur gleich von Anfang darnach einrichten.

Beschliefsen wir nämlich als Gewichts-Einheit für die Längen eine Messung zu nehmen, welche 0,1 Ruthe mittleren Fehler hat, so müssen wir nun auch die Gewichts-Einheit für die Winkel darnach festsetzen, und das können wir immer ohne alle Härte thun, da vom Taschen-Compafs bis zum Universal-Instrumente Winkel-Fehler aller Gröfsen im täglichen Verkehr uns vorkommen. Wir erhielten in unserem Beispiele also eine Beobachtung mit 6″ mittlerem Fehler zur Gewichts-Einheit für die Winkel. — Rechnen wir nun

1) nach n. 29, so können wir setzen:

$$m_1 = 0{,}6 \text{ Zehntel-Ruthen}$$
$$m_2 = 10 \text{ Zehntel-Minuten}$$
$$m_3 = 20 \text{ Zehntel-Minuten}$$

und am Ende finden wir $m = 1{,}5$ Zehntel-Ruthen, d. h. also 0,15 Ruthen, wie oben.

Wir hätten aber auch schon unsere Differential-Formel umarbeiten können, mit dem Zwecke, die §. 39. ursprünglich angeschriebenen Zahlen für m_2 und m_3 beizubehalten. Zu dem Ende hätten wir die l_2 und l_3 mit 10 zu multipliciren gehabt, d. h. statt dafs wir oben den Factor $\frac{60}{\varrho}$ einführten, hätten wir den Factor $\frac{600}{\varrho}$ eingeführt und dann, indem wir $m_1 = 0{,}6$; $m_2 = 1$; $m_3 = 2$ setzten, am Ende erhalten $m = 1{,}5$ Zehntel-Ruthen. Wollten wir aber diese letzten Werthe für m_1; m_2; m_3 beibehalten und m gleich in ganzen Ruthen haben, so behielten wir den Factor $\frac{60}{\varrho}$ bei, dividirten aber das obige l_1 erst mit 10; bekämen also $l_1 = 0{,}175$; $l_2 = 0{,}095$; $l_3 = 0{,}031$ und erhielten nach geschehener Substitution $m = 0{,}15$ Ruthen.

Ganz dasselbe und zwar nach Einrichtung der kleinen Tafeln am bequemsten auf die letzte Weise, erhielten wir

bei Benutzung der logarithmischen Differenzen. Wir bekämen nämlich so: $log\ b = 2{,}02531 + 41\ db$, weil 41 die Differenz ist zwischen 105,9 und 106,0; so wie auch zwischen 106,0 und 106,1 (statt dafs wir oben 409,5 db bekamen, weil zwischen 105 und 107 die Differenz 819 statt findet). Damit würde unser $l_1 = \frac{41}{234} = 0{,}175$ wie oben.

2) Wollen wir aber nach unserer neuen Annahme über die Gewichts-Einheiten nach n. **30** rechnen, so hätten wir zu setzen $p_1 = \frac{1}{(0{,}6)^2}$; $p_2 = \frac{1}{(10)^2}$; $p_3 = \frac{1}{(20)^2}$; also $\frac{1}{p_1} = 0{,}36$; $\frac{1}{p_2} = 100$; $\frac{1}{p_3} = 400$; daraus $\frac{1}{P} = 2{,}3881$ und endlich $m = 0{,}1\sqrt{2{,}3881} = 0{,}15$ wie oben.

Durch diese Art der Reduction von Gewichts-Einheiten läfst sich denn auch, besonders in den Fällen, wo die heterogenen Beobachtungs-Gröfsen unter sich alle gleich genau sind und wo also nach den Formeln n. **31** und **32** zu rechnen ist, zuweilen mit grofsem Nutzen eine solche willkührliche Einrichtung treffen, dafs die Coefficienten nicht allzusehr von einander verschieden sind, was die practische Rechnung erleichtert.

Zweiter Abschnitt.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Viertes Kapitel.

Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§. 41.

Der Zweck, welchen wir in diesem Abschnitte verfolgen, ist nach §. 10: diejenigen Elemente E_1; E_2; E_3 aufzusuchen, welche für die Beobachtungs-Gröfsen O_1; O_2; O_3; O_4; O_5, die wir aus ihnen berechnen, solche Werthe geben, dafs die Verbesserungen v_1; v_2; v_3; v_4; v_5, die wir darnach unseren wirklich angestellten Beobachtungen o_1; o_2; o_3; o_4; o_5 zuschreiben müssen, für $[vv]$ ein Minimum darstellen. — Wir haben hier gleich beispielsweise $z_e = 3$ und $z_o = 5$ gesetzt und werden dies auch in diesem Abschnitte ferner so halten; offenbar thut das aber nichts zur Sache, sobald nur $z_o > z_e$ ist, damit die Beobachtungen als in überschüssiger Anzahl vorhanden angenommen seyen.

Die Grundbedingung, von welcher wir bei unserem dermaligen Geschäfte ausgehen müssen, besteht also darin, dafs wir das Gesetz kennen, wornach die O von den E

bhängen; und diese Kenntnifs mufs uns von vorn herein egeben seyn, ehe wir irgend etwas Weiteres unternehmen.)er Ausdruck für dieses Gesetz mag übrigens seyn, welcher r will.

Wir brauchen nun aber hier nicht mehr wie früher die infacheren Fälle erst allein zu behandeln, sondern können ns hinlänglich vorbereitet halten gleich anzunehmen, dies Gesetz sey in Gleichungen dargestellt von der allgemeien Form:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 0 &= F_1(O_1 E_1 E_2 E_3)\\ 0 &= F_2(O_2 E_1 E_2 E_3)\\ 0 &= F_3(O_3 E_1 E_2 E_3)\\ 0 &= F_4(O_4 E_1 E_2 E_3)\\ 0 &= F_5(O_5 E_1 E_2 E_3) \end{aligned}$$

nd diese Gleichungen seyen uns gegeben; so dafs wir lie Zahlen-Werthe für die O berechnen können, sobald wir Zahlen-Werthe für die E besitzen.

Wir schliefsen dann also zunächst, dafs z_e von diesen Gleichungen (1) hinreichen müfsten, die E zu bestimmen, venn z_e von den O bekannt wären, d. h. mit anderen Woren, wenn z_e von unseren o fehlerfrei hätten beobachtet werlen können. Da wir aber gar keine fehlerfreien o voraustetzen dürfen, so machen wir uns auf den Widerspruch gefafst, dafs wenn wir die E aus z_e von unseren o bestimmen, nd ihre Zahlen-Werthe nebst den $z_o - z_e$ noch nicht gebrauchten o in die betreffenden Gleichungen substituiren, nun diese letzteren nicht, wie es nach (1) seyn sollte, 0 geben, sondern eine von 0 abweichende Zahl darstellen werlen. — Es ist also ein System von E zu finden, dessen Zahlen-Werthe mit den Zahlen-Werthen $o+v$ verbunden, llen Gleichungen (1) Genüge leisten, und dieses System mufs so beschaffen seyn, dafs $[vv]$ ein Minimum wird, da-

mit wir die $o+v$ für ausgeglichene Beobachtungen zu erklären und sie für die wahren Beobachtungs-Gröfsen O zu setzen berechtigt seyen, so lange uns keine neuen Mittel zu Erforschung der Wahrheit zukommen. Eben so lange haben wir dann natürlich auch die dergestalt gefundenen E für die uns immer unbekannt bleibenden wahren Elemente zu nehmen. Wir wollen sie zur Unterscheidung von den wirklich wahren Elementen, die definitiven Elemente nennen.

Die Berechnung dieser definitiven Elemente legen wir nun so an, dafs wir dabei indirect zu Werke gehen, indem wir zuerst genäherte Werthe von E (genäherte oder vorläufige Elemente) annehmen und sodann die diesen E noch beizufügenden Correctionen aufsuchen. Hierzu haben wir immer die Mittel. Denn nach der Voraussetzung besitzen wir mehr Beobachtungen und zwar gute Beobachtungen (vergl. §. 5.), als absolut nothwendig sind, um die E zu bestimmen; und was die aufzusuchenden Correctionen betrifft, so sehen wir leicht ein, dafs, da es sich nur um verschwindend kleine Aenderungen der Beobachtungen handelt, auch nur verschwindend kleine Aenderungen der genäherten Elemente zu suchen sind, dafs also lineare Gleichungen zwischen den Aenderungen der Beobachtungen und den Aenderungen der genäherten Elemente bestehen müssen.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir nur noch bemerken, dafs es allerdings Fälle giebt, wo dies eben angedeutete indirecte Verfahren gerade nicht nothwendig ist. Aber auch in solchen Fällen pflegt es die Arbeit doch bedeutend zu erleichtern. Deshalb stellen wir es hier als die allgemeine Regel auf und werden wegen der Ausnahmsfälle demnächst gelegentlich das Nöthige anmerken.

§. 42.

Vorausgesetzt also, dafs die Gleichungen (1) uns gegeben seyen, haben wir nun zur Ausgleichung unserer Beobachtungen und zur Auffindung der definitiven Elemente eben Haupt-Geschäfte zu verrichten, von denen e beiden ersten, die wir vorbereitende nennen wolen, schon am Ende des vorigen §. angedeutet sind.

1) Wir verschaffen uns eine möglichst genaue vorufige Kenntnifs von den Elementen. Diese können r, falls uns nicht etwa zufällig bequemere Mittel zu Gete stehen, wie gesagt, immer dadurch erlangen, dafs wir s den Beobachtungen so viele auslesen, als Elemente zu stimmen sind. Es versteht sich wohl für den Practiker n selbst, dafs wir schon bei diesem Auslesen mit Uebergung zu Werke gehen und überschlagen müssen, welche n den zu Gebote stehenden Combinationen der Beobachngen die Elemente wohl am besten bestimmen würden, enn sie daraus allein zu bestimmen wären. — Es versteht ch auch von selbst, dafs wir berechtigt sind, von allen weiren Mitteln, die wir etwa besitzen, um die vorläufige Anherung noch etwas weiter zu treiben, nützlichen Gebrauch machen. In der Regel wird dies aber kaum der Mühe hnen und werden wir uns also mit den gleich Anfangs gonnenen genäherten Elementen begnügen.

2) Wir suchen nun die linearen Gleichungen vischen den unendlich kleinen Aenderungen der Beobachngs-Gröfsen und den entsprechenden Aenderungen der lemente auf. — Diese können wir immer dadurch erlanen, dafs wir die Gleichungen (1) differentiiren; dadurch halten wir

$$
\begin{aligned}
d\mathit{O}_1 &= a_1 d\mathit{E}_1 + b_1 d\mathit{E}_2 + c_1 d\mathit{E}_3 \\
d\mathit{O}_2 &= a_2 d\mathit{E}_1 + b_2 d\mathit{E}_2 + c_2 d\mathit{E}_3 \\
d\mathit{O}_3 &= a_3 d\mathit{E}_1 + b_3 d\mathit{E}_2 + c_3 d\mathit{E}_3 \\
d\mathit{O}_4 &= a_4 d\mathit{E}_1 + b_4 d\mathit{E}_2 + c_4 d\mathit{E}_3 \\
d\mathit{O}_5 &= a_5 d\mathit{E}_1 + b_5 d\mathit{E}_2 + c_5 d\mathit{E}_3 ,
\end{aligned} \qquad (2)
$$

wo also, nach der bei partiellem Differentiiren üblichen Be-
zeichnung $a_1 = \left(\frac{d\mathit{O}_1}{d\mathit{E}_1}\right)$; $b_1 = \left(\frac{d\mathit{O}_1}{d\mathit{E}_2}\right)$; $c_1 = \left(\frac{d\mathit{O}_1}{d\mathit{E}_3}\right)$ u. s. w.

Wir bekommen so die Coefficienten zunächst in allge-
meinen Formeln, in welche demnächst noch Zahlen-Werth
zu substituiren sind, und bemerken, dafs dieses zweite Ge-
schäft sehr erleichtert wird oder wohl gar ganz wegfällt
wenn die Gleichungen (1) selbst schon linear sind. In die-
sem bequemen Ausnahmsfalle erhalten wir dann auch die
Coefficienten schon gleich in Zahlen, sobald (1) in Zahlen
stehen.

3) Nun berechnen wir die O nach unseren Glei-
chungen (1) aus den vorläufig angenommenen E, und zwar
mit aller Schärfe, welche die Umstände verlangen.
Wären also z. B. die O Winkelgröfsen, bei welchen wir auf
die Genauigkeit von einzelnen Secunden zählen könnten, so
rechneten wir mit sieben Decimalen, u. s. w.

4) Da unsere E noch gewisser Veränderungen bedürfen
die uns bis jetzt noch unbekannt sind, so sind den eben ge-
wonnenen O nun zunächst auch die von den $d\mathit{E}$ abhängigen
$d\mathit{O}$ beizufügen.

Dazu müssen wir nun vorerst unsere Gleichungen (2)
in Zahlen ausführen, indem wir in dem Ausdrucke $a_1 = \left(\frac{d\mathit{O}_1}{d\mathit{E}_1}\right)$
u. s. w. die Zahlen-Werthe substituiren, welche wir für die
E vermöge unseres ersten Geschäftes und für die O durch
unsere Berechnung im dritten Hauptgeschäfte besitzen.

Wir sehen hier ein, dafs wir bei Berechnung dieser oefficienten in den Gleichungen (2) alles unnöthige Stre- n nach Schärfe vermeiden können. Wirklich wird wohl r selten ein Fall vorkommen, in welchem nicht eine regel- chte Rechnung mit fünf Decimalen überflüssige Schärfe währte. — Auch sehen wir leicht, dafs es auf diese oefficienten ohne Einflufs seyn mufs, dafs die dabei ge- auchten Zahlen-Werthe für die E und O noch nicht die finitiven sind, sobald wir nur, unserer Hauptregel getreu, ter gute Beobachtungen zum Grunde gelegt und also die schon hinlänglich genähert haben. — Ferner versteht sich von selbst, dafs wenn wir etwa Mittel besitzen, zu lchen linearen numerischen Ausdrücken ohne Differentia- n und Substitution zu gelangen, wie uns z. B. schon §. 39. ı solcher Fall vorkam, wir von diesen Mitteln zur Zeit- sparnifs gern Gebrauch machen. — Endlich ist noch zumerken, dafs häufig dieses vierte Geschäft sehr nütz- h gleich bei Verrichtung des dritten gelegentlich mit be- rgt werden kann.

Nun hätten wir also unsere berechneten O auf der Form merischer linearer Ausdrücke:

$$O_1 + a_1\,dE_1 + b_1\,dE_2 + c_1\,dE_3$$
$$O_2 + a_2\,dE_1 + b_2\,dE_2 + c_2\,dE_3$$
u. s. w.

d diese Ausdrücke müfsten unseren o_1; o_2 u. s. w. alle eich seyn, wenn die o_1 fehlerfrei wären.

5) Setzen wir für den Augenblick voraus, die o wären irklich fehlerfrei, so brauchten wir nur

$$O_1 - o_1 = n_1$$
$$O_2 - o_2 = n_2$$
u. s. w.

zu setzen (wo die n also die Unterschiede zwischen d beobachteten und berechneten Werthen bedeuten, u demnach bekannte, noch dazu verschwindend kleine, Za lenwerthe von der Gattung der Beobachtungen sind), u hätten dann die Gleichungen:

$$\text{n. 33.}\quad \begin{aligned} 0 &= n_1 + a_1\,dE_1 + b_1\,dE_2 + c_1\,dE_3 \\ 0 &= n_2 + a_2\,dE_1 + b_2\,dE_2 + c_2\,dE_3 \\ 0 &= n_3 + a_3\,dE_1 + b_3\,dE_2 + c_3\,dE_3 \\ 0 &= n_4 + a_4\,dE_1 + b_4\,dE_2 + c_4\,dE_3 \\ 0 &= n_5 + a_5\,dE_1 + b_5\,dE_2 + c_5\,dE_3 . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen nennen wir Bedingungsgleichu gen. Der Name hat seinen Ursprung darin, dafs dur sie die Bedingung ausgesprochen wird, welcher die d streng entsprechen müfsten, wenn dies überhaupt möglic wäre, und welcher sie also mit möglichster Annäherung en sprechen sollen, wenn ersteres nicht möglich ist.

6) Wären nur z_e solcher Bedingungsgleichungen vo handen, so liefsen sich dadurch die dE durch Eliminatio finden; wir erführen dann aber nichts über die Verbesseru gen, welche den dabei gebrauchten o zukämen und hätte nur das auch sonst in der practischen Geometrie übliche i directe Verfahren angewandt. Da nun aber z_o Bedingungs gleichungen vorhanden sind, bei welchen solche o zu Grunde liegen, die erst in $o+v$ verwandelt werden müsse um den mehr erwähnten Widerspruch zu entfernen, so müs sen wir in unseren Bedingungsgleichungen statt der Null a der linken Seite erst das entsprechende v eingeführt denke und dann die dE so bestimmen, dafs $[vv]$ ein Minimum wird

Bilden wir also zuerst $[vv]$, d. h. quadriren wir die Grö fsen auf der rechten Seite der Bedingungsgleichungen un addiren, so wird:

$$\begin{aligned}[vv] = \quad & (n_1 + a_1\,dE_1 + b_1\,dE_2 + c_1\,dE_3)^2 \\ & + (n_2 + a_2\,dE_1 + b_2\,dE_2 + c_2\,dE_3)^2 \\ & + (n_3 + a_3\,dE_1 + b_3\,dE_2 + c_3\,dE_3)^2 \\ & + (n_4 + a_4\,dE_1 + b_4\,dE_2 + c_4\,dE_3)^2 \\ & + (n_5 + a_5\,dE_1 + b_5\,dE_2 + c_5\,dE_3)^2.\end{aligned}$$

f diese Gleichung ist nun die zweite Regel unseres §. 6. zuwenden, d. h. wir müssen machen, dafs

$$\frac{d[vv]}{dd E_1} = 0; \quad \frac{d[vv]}{dd E_2} = 0; \quad \frac{d[vv]}{dd E_3} = 0$$

:d.

Die Ausführung für die erste dieser Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned}\frac{d[vv]}{dd E_1} = \quad & 2(n_1 + a_1\,dE_1 + b_1\,dE_2 + c_1\,dE_3) \cdot a_1 \\ & + 2(n_2 + a_2\,dE_1 + b_2\,dE_2 + c_2\,dE_3) \cdot a_2 \\ & + 2(n_3 + a_3\,dE_1 + b_3\,dE_2 + c_3\,dE_3) \cdot a_3 \\ & + 2(n_4 + a_4\,dE_1 + b_4\,dE_2 + c_4\,dE_3) \cdot a_4 \\ & + 2(n_5 + a_5\,dE_1 + b_5\,dE_2 + c_5\,dE_3) \cdot a_5\end{aligned}$$

d eben solche Ausdrücke erhalten wir auch für die folgen- n partiellen Differential-Quotienten, nur durch Vertau- ıung der Buchstaben aufser den Parenthesen, nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{d[vv]}{dd E_2} = \quad & 2(n_1 + a_1\,dE_1 + b_1\,dE_2 + c_1\,dE_3) \cdot b_1 \\ & + \text{u. s. w.} \\ \frac{d[vv]}{dd E_3} = \quad & 2(n_1 + a_1\,dE_1 + b_1\,dE_2 + c_1\,dE_3) \cdot c_1 \\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

merken wir nun noch, dafs die Summen, welche wir so ıalten, alle = 0 gesetzt werden sollen und dafs also der ctor 2 als überflüssig weggelassen werden darf, so können r die Vorschrift für dieses Geschäft in folgende Worte fas- ı: Multiplicire jede Bedingungsgleichung erst mit ihrem genthümlichen Coefficienten von dE_1 und addire; dann ltiplicire jede Bedingungsgleichung mit ihrem eigenthüm- hen Coefficienten von dE_2 und addire, u. s. f.

Die Summen, welche wir auf diese Weise erhalten un
deren nothwendig so viele seyn müssen, als dE zu finde
sind, nennen wir nun **Normalgleichungen** und schrei
ben sie in unserer gewohnten Bezeichnung:

$$\text{n. 34.}\quad \begin{aligned} 0 &= [an] + [aa]\,\mathrm{d}E_1 + [ab]\,\mathrm{d}E_2 + [ac]\,\mathrm{d}E_3 \\ 0 &= [bn] + [ab]\,\mathrm{d}E_1 + [bb]\,\mathrm{d}E_2 + [bc]\,\mathrm{d}E_3 \\ 0 &= [cn] + [ac]\,\mathrm{d}E_1 + [bc]\,\mathrm{d}E_2 + [cc]\,\mathrm{d}E_3 \end{aligned}$$

Wir bemerken, dafs die Symmetrie, vermöge deren [ab]
[ac]; [bc] doppelt vorkommen, durchaus nothwendig au
der angegebenen Entstehung der Normalgleichungen folg
und können also bei der wirklichen Ausführung die doppelt
Berechnung dieser Coefficienten sparen.

Wir unterscheiden endlich die einzelnen Normalglei
chungen nach den dE, auf welche sie sich ursprünglich be
ziehen und nennen also z. B. die erste: Normalgleichun
für dE_1, die zweite: für dE_2 u. s. w.

7) In den Normalgleichungen, deren nothwendig im
mer z_e sind, finden sich nun endlich die gesuchten dE mi
lauter bekannten Zahlen verbunden, und da deren auch z
gesucht sind, so können wir sie nun durch **Eliminatio**
bestimmen. Dadurch erhalten wir denn

$$\mathrm{d}E_1 = e_1;\ \mathrm{d}E_2 = e_2;\ \mathrm{d}E_3 = e_3;$$

wo die e ganz bestimmte Zahlen-Werthe sind, denen wi
also auch dieselben Benennungen beizufügen haben, die wi
schon in 2) den dE zukommend dachten, und welche wi
dann zu unseren in 1) gefundenen vorläufigen E algebraisch
addiren, um

$$E_1 + e_1;\ E_2 + e_2;\ E_3 + e_3$$

für die **definitiven Elemente** zu erklären.

§. 43.

Die Uebersicht der Geschäfte, welche der vorige §. von ns verlangt, ist also:

I. vorbereitend	1) vorläufige genäherte Elemente zu suchen;
	2) Differential-Gleichungen für Elemente und Beobachtungen aufzustellen;
II. sodann	3) die Beobachtungen aus den vorläufigen Elementen scharf zu berechnen;
	4) die Differential-Gleichungen numerisch auszuführen;
	5) die Bedingungs-Gleichungen zu bilden;
III. endlich	6) die Normal-Gleichungen zu bilden;
	7) zu eliminiren.

Wir haben schon angemerkt, dafs sich zuweilen vorıeilhafte Abkürzungen finden, dafs also z. B. das zweite ieschäft wegfallen, oder das vierte gleich gelegentlich mit em dritten verbunden werden kann. Nur die unter III. erähnten Geschäfte bleiben immer dieselben. Demungeachet müssen wir aber die vorbemerkte Uebersicht uns stets egenwärtig halten, weil sie uns bei allen Aufgaben dieser rt immer sicher zum Ziele führt.

Rücksichtlich des Eliminirens ist noch zu bemerken, afs mit der Ausbildung der Methode der kleinsten Quadrate uch ein elegantes Verfahren zur Ausführung des immer bechwerlichen Eliminations-Geschäftes verbunden wurde, elches, unter dem Namen des *Gaufsischen Eliminations-*

Processes bekannt, gewöhnlich angewandt zu werden pfleg
wenn die Anzahl der Normal-Gleichungen bedeutende
wird und man doch direct eliminiren will oder mufs. W
übergehen dies hier, mit Vorbehalt darauf zurückzukom
men, einstweilen noch ganz, und überlassen es dem Lese
die verlangte Elimination auf jede beliebige Weise zu be
werkstelligen, welche ihm gerade am geläufigsten ist; thei
um nicht zu viel Neues auf einmal vorzuführen, theils auc
um dem Irrthume vorzubeugen, als bilde diese Method
des Eliminirens einen wesentlich nothwendigen Bestandthe
unserer Ausgleichungs-Rechnung als solcher, was keines
weges der Fall ist.

Ist aber nun die Elimination vollendet und gehörig ge
prüft, so ist der unmittelbare Zweck zwar erreicht, inde
die aufgefundenen definitiven Elemente den ausgeglichene
Beobachtungen $o+v$ Genüge leisten und $[vv]$ zu einem Mi
nimum gemacht ist. Zu künftigem Gebrauche ist aber noc
der Werth der einzelnen ausgeglichenen Beobachtunge
oder was einerlei ist, der einzelnen v auszumitteln und die
ses nachträgliche Geschäft kann auf doppelte Weise verrich
tet werden. Entweder nehmen wir die Bedingungsgleichun
gen n. 33 einzeln vor und substituiren in ihnen die Werth
der e an die Stelle der dE; dadurch erhalten wir denn i
der ersten v_1, in der zweiten v_2 u. s. w. statt der 0. — Ode
wir wiederholen mit den definitiven Elementen $E_1 + e_1$
$E_2 + e_2$ u. s. w. unser drittes Geschäft und müssen also dan
die $o+v$ an der Stelle der früher berechneten O erhalten.

Die Frage nach der Genauigkeit unserer Resultate ver
schieben wir vor der Hand so lange, bis wir erst das Vorig
durch Rechnungs-Beispiele erläutert haben.

§. 44.

Für unsere Rechnungs-Beispiele wähle ich zuerst einen Fall aus meiner eigenen Praxis.

1) Mit den im dritten Beispiele des §. 37. erwähnten Maafsstäben mafs ich zum Behufe der grofsen und wichtigen Centrirung auf der *Amöneburg* (*Beiträge zur Geographie von Kurhessen*, S. 116.) eine kleine Basis, die *AC* heifsen mag. Nahe in der Mitte derselben hatte ich einen Punkt *B* angenommen, und nun wurde jedesmal von einem der drei Punkte ausgegangen und bis an die beiden anderen gemessen.

Beim Ausgehen von *A* und *C* blieben die Stäbe, welche bis *B* angelegt waren, nachdem der Ueberschufs < 1 Fufs gemessen war, liegen, und wurde sodann blofs an den letzten vollen Toisenstab wieder neu angelegt, um bis zum weiten Punkte fortzumessen. Streng genommen waren also die Beobachtungen nicht ganz unabhängig von einander; wir haben uns aber eben §. 37. überzeugt, dafs wir sie ungeachtet, weil die Messung des Ueberschusses einen so überwiegenden Einfluſs hat, dafs die anderen Fehler dagegen vernachlässigt werden können, als unabhängig behandeln dürfen.

Die Messungen waren nun, nach Anbringung der Stabcorrectionen und Verwandlung aller kleineren Theile in Decimalbrüche der Toise:

$$o_1 = AB = 9{,}378976$$
$$o_2 = AC = 18{,}125097$$
$$o_3 = BA = 9{,}379902$$
$$o_4 = BC = 8{,}746738$$
$$o_5 = CB = 8{,}746164$$
$$o_6 = CA = 18{,}125676.$$

Diese Beobachtungen sind von zwei Elementen E_1 und E abhängig, welche hier selbst unmittelbar mit gemessen sind weil sie nichts anderes bedeuten, als die beiden Theile de Basis. Dieser Umstand bringt für die Praxis grofse Erleich- terung mit. Wir wollen aber demungeachtet so rechnen, al ob wir diesen erleichternden Umstand nicht bemerkt hätten.

Die Gleichungen, welche wir §. 41. mit (1) bezeich- neten, sind also:

$$(1)\qquad \begin{aligned} O_1 &= E_1 \\ O_2 &= E_1 + E_2 \\ O_3 &= E_1 \\ O_4 &= E_2 \\ O_5 &= E_2 \\ O_6 &= E_1 + E_2 \end{aligned}$$

und hieran sind nun unsere sieben Geschäfte auszuführen Wir wollen aber zur Abkürzung im Laufe der Arbeit die Milliontel-Toisen zur Einheit nehmen, um durchweg mi ganzen Zahlen zu rechnen. Am Ende können wir dann die sechs Decimalen wieder abschneiden.

Erstes Geschäft.

Wir setzen aus o_1 und o_3 vorläufig $E_1 = 9379000$
aus o_4 und o_5 - - $E_2 = 8746000$,

indem wir absichtlich immer auf 2 Beobachtungen dabei Rücksicht nehmen, statt dafs uns eine nur nöthig war, und auch absichtlich Bequemlichkeits halber hinten abrunden Wir hätten demnach $E_1 + E_2 = 18125000$ näherungs- weise vorausgesetzt.

Zweites Geschäft.

Da die Gleichungen (1) linear sind, so erhalten wir die verlangten Differential-Quotienten durch bloſses Ab-

hreiben, und brauchen uns damit in der Praxis gar nicht zu emühen. Hier aber, wo es nur um Erläuterung der Me-ıode sich handelt, wollen wir doch alles noch weitläufig ıfschreiben. Demnach wird

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}O_1 &= \mathrm{d}E_1 \\
\mathrm{d}O_2 &= \mathrm{d}E_1 + \mathrm{d}E_2 \\
\mathrm{d}O_3 &= \mathrm{d}E_1 \\
\mathrm{d}O_4 &= \mathrm{d}E_2 \\
\mathrm{d}O_5 &= \mathrm{d}E_2 \\
\mathrm{d}O_6 &= \mathrm{d}E_1 + \mathrm{d}E_2 .
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Drittes Geschäft.

Auch dieses fällt in der Praxis in diesem besonderen alle ganz weg, da die vorläufig angenommenen Elemente $_1$ und E_2 und deren Summe schon die berechneten O ırstellen. Wir schreiben aber zum Ueberflusse hier auch auf:

Berechnet
$$
\begin{aligned}
O_1 &= 9379000 \\
O_2 &= 18125000 \\
O_3 &= 9379000 \\
O_4 &= 8746000 \\
O_5 &= 8746000 \\
O_6 &= 18125000 .
\end{aligned}
$$

Viertes Geschäft.

Die numerische Ausführung der Differential-Gleichun-n ist gleichfalls schon fertig. Wir haben nämlich unmit-lbar aus (2)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 & b_1 &= 0 \\
a_2 &= 1 & b_2 &= 1 \\
a_3 &= 1 & b_3 &= 0 \\
a_4 &= 0 & b_4 &= 1 \\
a_5 &= 0 & b_5 &= 1 \\
a_6 &= 1 & b_6 &= 1
\end{aligned}
$$

und übersehen, dafs wir in der Praxis bei einiger Uebun alle drei zuletzt erwähnten Geschäfte durch eine leicht Kopfrechnung hätten ersetzen können.

Fünftes Geschäft.

Die n finden wir nun, indem wir die gemessenen o vo den berechneten O abziehen, und somit haben wir die

Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= +\ 24 + dE_1 \\
0 &= -\ 97 + dE_1 + dE_2 \\
0 &= -\ 902 + dE_1 \\
0 &= -\ 738 \qquad + dE_2 \\
0 &= -\ 164 \qquad + dE_2 \\
0 &= -\ 676 + dE_1 + dE_2 .
\end{aligned}$$

Sechstes Geschäft.

Da die numerisch ausgeführten Differential-Quotien ten alle entweder 1 oder 0 sind, so bilden wir die $[an]$; $[aa$ u. s. w. durch blofses Addiren und erhalten so:

+ 24	+1	0	0	0
− 97	+1	+1	− 97	+1
− 902	+1	0	0	0
0	0	0	− 738	+1
0	0	0	− 164	+1
− 676	+1	+1	− 676	+1
$[an] = -1651$	$[aa] = +4$	$[ab] = +2$	$[bn] = -1675$	$[bb] = +4$

Demnach haben wir die

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= -\ 1651 + 4dE_1 + 2dE_2 \\
0 &= -\ 1675 + 2dE_1 + 4dE_2 .
\end{aligned}$$

Siebentes Geschäft.

Die Elimination machen wir hier offenbar am leichte

ien, indem wir erst die erste und sodann die zweite Glei-
hung mit — 2 multipliciren und dann jedesmal addiren:

$$0 = +3302 - 8dE_1 - 4dE_2 \qquad 0 = -1651 + 4dE_1 + 2dE_2$$
$$0 = -1675 + 2dE_1 + 4dE_2 \qquad 0 = +3350 - 4dE_1 - 8dE_2$$
$$0 = +1627 - 6dE_1 \qquad 0 = +1699 \quad -6dE_2.$$

Wir haben also am Ende, mit Weglassung der unnöthigen
Brüche:

$$e_1 = +271 \qquad e_2 = +283$$

nd, mit Herstellung der ganzen Toise, die

Definitiven Elemente:

$$AB = E_1 + e_1 = 9{,}379271$$
$$BC = E_2 + e_2 = 8{,}746283,$$

Woraus folgt

$$AC = \quad = 18{,}125554.$$

Nachträglich haben wir nun zunächst, entweder
urch Substitution der e_1 und e_2 in die Bedingungsgleichun-
en oder durch neue Berechnung aus den definitiven Ele-
ienten und Vergleichung mit den Beobachtungen, wenn
ir die Milliontel-Toisen wieder zur Einheit nehmen:

$$v_1 = +295$$
$$v_2 = +457$$
$$v_3 = -631$$
$$v_4 = -455$$
$$v_5 = +119$$
$$v_6 = -122.$$

Diese Werthe der v bewiesen mir nun (freilich auf erst spä-
er zu erklärende Weise), dafs die Basismessung genauer
usgefallen war, als ich die centrale Aufstellung des Theo-
olithen in den Punkten bewirken zu können hoffen durfte,
nd dafs dieselbe also für die weitere Arbeit als absolut ge-

nau zu betrachten sey. So wollen wir sie demnach im fol
genden Beispiele auch behandeln.

Es mag endlich noch angemerkt werden, dafs hier ge
rade ein solcher Ausnahmsfall vorliegt, wie am Ende de
§. 41. erwähnt ist; denn es ergiebt sich unmittelbar aus de
Gleichungen (1), dafs

$$4E_1 + 2E_2 = o_1 + o_2 + o_3 + o_6$$
$$2E_2 + 4E_2 = o_2 + o_4 + o_5 + o_6$$

und hätten also die definitiven Elemente auch ohne das in
directe Verfahren gefunden werden können. Es bleibt abe
letzteres, wenn wir nichts unnöthiges aufschreiben, doc
noch bequemer.

Ein ähnlicher Ausnahmsfall findet sich, wenn die Be
obachtungen an sich schon unendlich kleine Gröfsen betref
fen, wie dies z. B. bei Aufsuchung der Excentricitäts- un
Theilungsfehler eines Theodolithen vorkommt.

2) Die im ersten Beispiele angeführte Basis-Messun
hatte nnn den Zweck, die Centrirungs-Elemente für de
Standpunkt A auf den Thurm-Knopf K zu geben. Zu dem
Ende war die Basis vom Anfange herein mit aller erreichba
ren Schärfe von A auf das Taufstein-Signal T gerichtet wor
den und wurden nun die Winkel KCT, KBT, KAT ge
messen.

Diese Winkel waren nun zwar in dem wirklichen Fall
nicht von ganz gleicher Genauigkeit. Wir wollen aber, da
es hier nur auf ein Rechnungs-Beispiel ankommt, sie als
gleich genau voraussetzen und sie überdiefs zur Bequemlich-
keit hier auf die erste Decimale abrunden. So wird

$$o_1 = KCT = 86^\circ\,27'\,18'',9$$
$$o_2 = KBT = 73\;\;22\;\;13\,,4$$
$$o_3 = KAT = 61\;\;\;4\;\;38\,,7\,.$$

Als Elemente, wovon diese Winkel abhängen, können wir die Coordinaten des Punktes K in Beziehung auf unsere Basis betrachten. Wir setzen also $E_1 = x$ als Abscisse, auf der Basis von A aus gezählt, und $E_2 = y$. Ferner nehmen wir aus dem vorigen Beispiele die beiden constanten Gröfsen $AC = D_1$ und $AB = D_2$, welche bei der Berechnung gebraucht werden, indem wir zur Bequemlichkeit unserer dermaligen Beispiels-Rechnung auch noch die beiden letzten Decimalen wegrunden.

So erhalten wir $D_1 = 18{,}1256$ Toisen, $D_2 = 9{,}3793$ Toisen und können der Gleichförmigkeit wegen auch noch $D_3 = 0$ hinzufügen.

Nun werden unsere ursprünglich gegebenen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} tang\, O_1 &= \frac{y}{x - D_1} \\ tang\, O_2 &= \frac{y}{x - D_2} \\ tang\, O_3 &= \frac{y}{x - D_3}. \end{aligned}$$

Das erste Geschäft habe ich ausgeführt, indem ich mit fünf Decimalen aus o_1 und o_3 berechnete

$$x = +\,20{,}414 \qquad y = +\,36{,}946.$$

Für das zweite Geschäft finden wir durch Differentiation zunächst:

$$\frac{dO_1}{\cos O_1^{\,2}} = -\frac{y dx}{(x - D_1)^2} + \frac{dy}{(x - D_1)} \text{ u. s. w.}$$

Wir wollen aber nun noch die Distanzen

$$CK = r_1;\ BK = r_2;\ AK = r_3$$

einführen, die wir doch bei solchen Gelegenheiten ohnehin gern mit berechnen, weil sie wenig Mühe machen und auch noch eine Prüfung gewähren können, und wollen ferner beschliefsen, die dO in Secunden auszudrücken, deshalb also rechter Hand noch mit ϱ multipliciren.

So erhalten wir:

$$(2)\quad \begin{aligned} dO_1 &= -\frac{\varrho \sin O_1}{r_1}dx + \frac{\varrho \cos O_1}{r_1}dy = a_1 dx + b_1 dy \\ dO_2 &= -\frac{\varrho \sin O_2}{r_2}dx + \frac{\varrho \cos O_2}{r_2}dy = a_2 dx + b_2 dy \\ dO_3 &= -\frac{\varrho \sin O_3}{r_3}dx + \frac{\varrho \cos O_3}{r_3}dy = a_3 dx + b_3 dy. \end{aligned}$$

Das dritte Geschäft führen wir vermittelst der Vega'schen Tafeln mit sieben Decimalen aus und verbinden damit gleich

das vierte Geschäft, bei welchem wir schon wieder zu den kleinen Tafeln übergehen können.

So erhalten wir:

	für O_1	für O_2	für O_3
y =	+ 36,946	+ 36,946	+ 36,946
$(x-D)$ =	+ 2,2884	+ 11,0347	+ 20,4140
y	1,5675674	1,5675674	1,5675674
$(x-D)$....	0,3595319	1,0427605	1,3099281
tang O	1,2080355	0,5248069	0,2576393
O =	86°27′20″,45	73°22′14″,30	61°4′39″,94
sin O	9,9991691	9,9814453	9,9421454
cos O	8,7911336	9,4566384	9,6845061
r	1,5683983	1,5861221	1,6254220
$\varrho \sin O$	5,3135942	5,2958704	5,2565705
$\varrho \cos O$	4,1055587	4,7710635	4,9989312
a	3,74520n	3,70975n	3,63115n
b	2,53716	3,18494	3,37351
a =	— 5561,6	— 5125,7	— 4277,1
b =	+ 344,5	+ 1530,9	+ 2363,3.

Für das fünfte Geschäft finden wir zunächst aus Vergleichung der O mit den Beobachtungen:

$$n_1 = +1{,}55;\ n_2 = +0{,}90;\ n_3 = +1{,}24.$$

eraus können wir nun unsere Bedingungsgleichungen zu-
nmenstellen. Es ist aber wohl nicht nöthig, sie förmlich
fzuschreiben. Ja wir hätten selbst oben die a und b nicht
Zahlen aufzuschlagen gebraucht; denn zum Behufe der
absichtigten Multiplicationen reichen die Logarithmen hin,
e wir hier mit Leichtigkeit zuerst fanden. Nur wenn wir
wa zur Prüfung auch noch die directe Multiplication ma-
ten wollen, können uns jene Zahlen von Nutzen seyn.

ir das sechste Geschäft schlagen wir nun also noch auf

$log.n_1 = 0{,}19033$; $log.n_2 = 9{,}95424$; $log.n_3 = 0{,}09342$.

ann finden wir durch Addition der vorhandenen Logarith-
en und Aufschlagen, ohne erst die Summen hinzuschrei-
n, die Coefficienten der Normal-Gleichungen, wobei wir
s unbedenklich erlauben, die letzten Ziffern, wo wir sie
cht mehr genau mit fünf Decimalen erhalten, durch Nul-
n zu ersetzen. Dies giebt:

für $[an]$	für $[aa]$	für $[ab]$	für $[bn]$	für $[bb]$
8620,40	+ 30931400	— 1915830	+ 533,94	+ 118665
4613,10	+ 26272400	— 7846800	+1377,78	+2343580
5303,63	+ 18293800	— 10107900	+2930,40	+5585000
18537,13	+ 75497600	— 19870530	+4842,12	+8047245

ie eben berechneten Zahlen zeigen auf den ersten Blick,
ıfs die gesuchten Gröfsen e jedenfalls sehr klein werden,
erschläglich kaum halbe Tausendtel von Toisen betragen
ögen. Wir können also gleich beschliefsen, sie in solchen
ausendteln auszudrücken und das bewirken wir am leichte-
en, wenn wir in $[aa]$; $[ab]$; $[bb]$ die drei letzten Ziffern,
elche ohnehin nicht zuverlässig sind, wegrunden.

Auf diese Weise erhalten wir also unsere Normalglei-
ıungen:

$$0 = -18537{,}13 + 75498\,dx - 19871\,dy$$
$$0 = +\ 4842{,}12 - 19871\,dx + 8047\,dy.$$

Unser siebentes Geschäft, die Elimination, woll wir hier dadurch machen, dafs wir mit den Coefficient von dy durchdividiren und abziehen, sodann dividiren u substituiren. Die Rechnung selbst, welche hier noch ei mal in aller Ausführlichkeit Platz finden mag, steht da mit Logarithmen ausgeführt, so:

	4,26804 n	4,87794	4,2982
	3,68503	4,29822 n	3,9056
	9,96982	0,57972 n	
	9,77940	0,39259 n	
$0 = +$	0,93286	$-$ 3,79945 $dx + dy$	
$0 = +$	0,60173	$-$ 2,46939 $dx + dy$	
$0 = +$	0,33113	$-$ 1,33006 dx	
	9,52000	0,12387 n	
$dx = +$	0,24896	$lg\ dx$ . . 9,39613	
		9,97585 n	
		9,78872 n	
$dy = +$	0,01304	$-$ 0,94590	
$+$	0,01306	$-$ 0,61479 $log\ dy$ . . .	8,11561

Demnach haben wir nun, indem wir die Toise wieder zu Einheit setzen und wieder die letzten Ziffern wegrunden,

$$e_1 = +0{,}000249 \qquad e_2 = +0{,}000013$$

und endlich die definitiven Elemente

$$x = +20{,}414249 \qquad y = +36{,}946013.$$

Wollen wir nachträglich nun noch sehen, welche Cor rectionen unseren beobachteten o beizufügen sind, so brau chen wir nur unsere a und b mit den gefundenen e_1 und e zu multipliciren und die Producte (algebraisch) zu den n z addiren. Dadurch erhalten wir:

$$v_1 = +0'',17$$
$$v_2 = -0\ ,36$$
$$v_3 = +0\ ,21.$$

asselbe hätten wir erhalten, wenn wir mit den definitiven lementen das dritte Geschäft wiederholt hätten.

Wir hätten in diesem Beispiele auch wohl, mit Umge- ıng des zweiten Geschäftes, die Coefficienten a und b durch enutzung der logarithmischen Differenzen aufsuchen kön- en, ähnlich wie im §. 39. Es würde das aber schwerlich ier eine Erleichterung gewährt haben.

3) In dem vorigen Beispiele waren die rechtwinkligen oordinaten von K nur Mittel zum Zwecke, insofern eigent- ch die Centrirungs-Elemente gesucht wurden, wozu also $+ v_3$ und das darnach verbesserte r_3 zu nehmen wären. Vir hätten also sehr wohl die Aufgabe auch anders auffassen ıd K gegen die Basis gleich durch sogenannte Polar-Co- rdinaten bestimmen können. — Dann hätten wir vorerst $= O_3 = E_1$ und $R = r_3 = E_2$ setzen müssen und hät- ın also die Gleichungen gehabt:

$$(1)\qquad \begin{aligned} R\sin(O_1 - V) &= D_1 \sin O_1 \\ R\sin(O_2 - V) &= D_2 \sin O_2 \\ O_3 - V &= 0. \end{aligned}$$

Vir hätten nun vorläufig $V = o_3$ setzen und R aus der er- ·en dieser Gleichungen berechnen können, indem wir auch orläufig $O_1 = o_1$ gesetzt hätten.

Die Differentiation hätte für die erste dieser Gleichun- en gegeben:

$$R\sin(O_1 - V) + R\cos(O_1 - V)\mathrm{d}O_1 - R\cos(O_1 - V)\mathrm{d}V = D_1 \cos O_1 \mathrm{d}O_1.$$

'ühren wir hierin das r_1 ein, welches wir bei dem dritten ieschäfte doch gelegentlich mit berechnen können, und be- ıerken, dafs $r_1 = R\cos(O_1 - V) - D_1 \cos O_1$, ziehen en Ausdruck zusammen und führen auch ϱ ein, so erhal- ·n wir:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}O_1 &= -\frac{\varrho \sin(O_1 - V)}{r_1}\,\mathrm{d}R + \frac{R\cos(O_1 - V)}{r_1}\,\mathrm{d}V \\
(2)\qquad \mathrm{d}O_2 &= -\frac{\varrho \sin(O_2 - V)}{r_2}\,\mathrm{d}R + \frac{R\cos(O_2 - V)}{r_2}\,\mathrm{d}V \\
\mathrm{d}O_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

Hierdurch hätten wir also das gewinnen können, dafs in de Bedingungsgleichungen $n_1 = n_3 = a_3 = 0$ und $b_3 =$ geworden wäre. Dadurch wären bei Bildung der Normal gleichungen sieben von den 15 Producten, welche wir i vorigen Beispiele berechnen mufsten, erspart worden. E bleibt also Sache der practischen Ueberlegung, ob dies Ersparung im sechsten Geschäfte, den vermehrten Zeit-Auf wand des dritten und vierten Geschäftes, wo jetzt zweima aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu rechne und hernach noch eine besondere Rechnung für die Coef ficienten von (2) zu machen ist, so wie den Mangel an Sym metrie des Verfahrens hinreichend vergütet.

Jedenfalls können wir die Durchführung des Beispiele zur Uebung empfehlen. Das Resultat mufs mit dem vorige Beispiele übereinstimmen.

4) Oben wurde schon beiläufig erwähnt, dafs das ge genwärtig betrachtete Verfahren zur Anwendung komme wenn bei der Pothenot'schen Aufgabe mehr als dre Punkte durch Coordinaten gegeben sind. Wie dabei zu ver fahren ist, wenn die Winkel zwischen denselben nur in de unerläfslich nothwendigen Anzahl gemessen, oder bei über schüssiger Anzahl erst vor weiterer Rechnung durch Hori zont-Abschlufs ausgeglichen sind, dieses haben wir in ei nem besonderen Schriftchen über diese nützliche Aufgabe (*Die Pothenot'sche Aufgabe in practischer Beziehung, Marburg* 1840.) und zwar zunächst in dessen §. 13., vor Kurzem erst ausführlich gezeigt und erlauben uns hier dar auf nur zu verweisen.

Dagegen wollen wir hier den Fall vornehmen, dafs die überschüssiger Anzahl vorhandenen Winkel nicht durch orizont-Abschlufs vorläufig verbessert, sondern unmit-elbar zur Bestimmung der Elemente (Coordinaten des tandpunktes) gebraucht werden sollten, wodurch wir auch elegenheit erhalten, noch etwas Weiteres anzumerken, was is für die Folge von Nutzen seyn kann.

Dieser Fall scheint nämlich, blofs theoretisch die Sache etrachtet, eigentlich allein in unseren ursprünglichen Vor-issetzungen vorgesehen; denn sind o_1; o_2 .... die unmit-lbaren Beobachtungen, so sollen wir auch eigentlich die ; v_2 .... unmittelbar durch eine Rechnung suchen. — ei der practischen Bearbeitung von Winkel-Messungen t aber zu erwägen, dafs zwei ganz verschiedene Ursachen as Bedürfnifs von Verbesserungen herbeiführen. Nämlich:

a) wir können die Punkte, welche wir auf einer Station anschneiden wollen, vermöge der unvermeidlichen Fehler des Auges und des Instrumentes nicht genau treffen und erhalten dadurch also Widersprüche zwischen unseren Messungen dieser Station.

b) Die Punkte, welche wir anschneiden wollen, sind nicht immer die, welche wir anschneiden sollen, denn wenn die zu a) erwähnten Fehler auch gänzlich wegfielen und wir also absolut genaue Visirlinien hätten, so bliebe doch die Möglichkeit, ja die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Visirlinien nicht genau die physischen Punkte träfen, welche eigentlich Visirpunkte seyn sollen und in welchen also z. B. bei'm Uebergange von einer Winkelstation zu einer anderen die neue Aufstellung stattfindet, um so mehr, da wir bei den Aufstellungen auch nicht microscopisch centriren können.

Deshalb haben wir es uns für Triangulirungen zur Re-

gel gemacht, an die gemessenen Winkel zweierlei Co rectionen anzubringen und diese einzeln nach der Method der kleinsten Quadrate zu bearbeiten. Zuvörderst die *cor H.*, welche die zuerst erwähnten Widersprüche aufhebt un also sich immer nur auf die Visirlinien einer Station bezieh Diese wird bei der Messung zusammenhängender repetirte Winkel durch den Horizont-Abschlufs gefunden, bei Satz Beobachtungen liegt sie, nur in anderer Form, in den z nehmenden arithmetischen Mitteln. — Sodann aber suche wir, in so fern die Mittel dazu vorhanden sind, die *corr.* Δ welche diejenigen Widersprüche aufhebt, welche darau entstehen, dafs auch die durch *corr. H* berichtigten Visirli nien jeder Station, selbst wenn die Berichtigung absolut ge nau gewesen wäre, noch neben den Punkten vorbeigehe können, welche eigentlich Gegenstand unserer Beobachtun seyn sollten und die wir aus der Ferne um etwas verkann ten. — Durch diese beiden Correctionen, mit welche wir uns noch mehr zu beschäftigen haben werden, verwan deln wir also unsere o in $o + H + \Delta$ und machen, dafs fü $[HH]$ und für $[\Delta\Delta]$ die möglich kleinsten Werthe gefunde werden.

Ein ähnlicher Fall ist nun bei ernstlicher Anwendung der Pothenot'schen Aufgabe. Denn die gegebenen Coordi naten sind nie streng richtig. Wir berichtigen also zuerst unsere Visirlinien durch Horizont-Abschlufs und verwandeln dadurch unsere o in $o + H$. Darnach bestimmen wir nun unsere definitiven Elemente und berechnen dann zuletzt nach träglich die Correctionen, welche die $o + H$ noch bedür fen würden, um alle Widersprüche zu entfernen, wenn die Coordinaten absolut genau wären. Diese letzten Correctio nen, (deren Berechnung wir freilich in diesem Abschnitte noch nicht erklären können), geben uns dann aber nur ein

theil darüber, wie weit die von uns gesehenen Visir-
nkte mit denen durch die Coordinaten-Zahlen dargestell-
ı übereinstimmen oder nicht; und es müfste noch jedem
inkel ein Δ hinzugefügt werden, wenn die Widersprüche
ischen den Messungen und den Coordinaten-Angaben
nz aufgehoben werden sollten. Wir haben dies a. a. O.
20. 27. und §. 14. näher nachgewiesen und beziehen uns
ö darauf.

Hier rechnen wir nun aber ohne Horizont-Abschlufs
sselbe Beispiel, nicht um die Elemente genauer zu be-
mmen, als in dem Beispiele jenes Schriftchens geschehen,
ıdern nur um uns zu üben.

Die unmittelbaren Beobachtungen waren nun (a. a. O.
22.)

$$\begin{aligned}
1.2 &= o_1 = 73^\circ 35' 22'',8 \\
1.3 &= o_2 = 80\ 37\ 10,8 \\
4.1 &= o_3 = 181\ 27\ 5,0 \\
5.1 &= o_4 = 178\ 11\ 1,5 \\
2.4 &= o_5 = 104\ 57\ 33,0 \\
3.5 &= o_6 = 101\ 11\ 50,8.
\end{aligned}$$

e angenommenen Elemente waren (a. a. O. S. 28.)

$x = +2836{,}5$ par. Fufs. $\quad y = +444{,}4$ par. Fufs.

e Rechnung aus den Elementen giebt (a. a. O. S. 29. mit
nführung der Correction der einen Ordinate S. 35.)

$$\begin{aligned}
w' &= 92.56.41{,}12 + 26{,}07\,dx + 1{,}34\,dy \\
w'' &= 166.31.49{,}25 + 19{,}87\,dx + 82{,}95\,dy \\
w''' &= 173.33.57{,}89 + 10{,}80\,dx + 95{,}78\,dy \\
w^{IV} &= 271.29.22{,}17 - 51{,}79\,dx - 1{,}35\,dy \\
w^{V} &= 274.45.36{,}35 - 76{,}56\,dx - 6{,}38\,dy.
\end{aligned}$$

ir haben nun zur Berechnung der O die Gleichungen:

$$O_1 = w'' - w'$$
$$O_2 = w''' - w'$$
$$O_3 = w' - w^{IV}$$
$$O_4 = w' - w^{V}$$
$$O_5 = w^{IV} - w''$$
$$O_6 = w^{V} - w'''.$$

Die so berechneten Werthe mit den beobachteten o vergl chen, geben dann die

Bedingungsgleichungen:

$$0 = -14'',67 - 6,20\,dx + 81,61\,dy$$
$$0 = +5,97 - 15,27\,dx + 94,44\,dy$$
$$0 = +13,95 + 77,86\,dx + 2,69\,dy$$
$$0 = +3,27 + 102,63\,dx + 7,72\,dy$$
$$0 = -0,08 - 71,66\,dx - 84,30\,dy$$
$$0 = -12,34 - 87,36\,dx - 102,16\,dy.$$

Die Multiplication und Addition giebt uns nun nach Weglas sung der überflüssigen Decimalen die beiden

Normalgleichungen:

$$0 = +2505,3 + 29634\,dx + 14019\,dy$$
$$0 = +696,8 + 14019\,dx + 33191\,dy.$$

Durch die Elimination finden wir daraus

$$dx = -0,0932 \qquad dy = +0,0184$$

und somit die definitiven Elemente:

$$x = +2836,4068 \qquad y = +444,4184.$$

Substituiren wir nun noch nachträglich die eben gefundene Werthe von dx und dy in unsere Bedingungsgleichungen, so erhalten wir endlich:

$$v_1 = -12'',60$$
$$v_2 = +\ 9,13$$
$$v_3 = +\ 6,74$$
$$v_4 = -\ 6,25$$
$$v_5 = +\ 5,05$$
$$v_6 = -\ 6,18.$$

Nachdem wir hiermit unser Rechnungs-Beispiel vollde det haben, ist es dem Practiker vielleicht interessant, noch mal nachzusehen, in wiefern wir durch die gegenwärte Rechnung die v jetzt anders (wir dürfen nach dem Obin durchaus nicht sagen genauer) erhalten haben als in jer Rechnung. Wir stellen zu dem Ende die a. a. O. S. 36. brauchten, aber nicht mit abgedruckten Δ für die einzeln Richtungen hierher, deren Berechnungsweise freilich t im folgenden Abschnitte erklärt wird. Sie waren:

$$\Delta' = +\ 0'',812$$
$$\Delta'' = -11,168$$
$$\Delta''' = +11,342$$
$$\Delta^{IV} = -\ 6,498$$
$$\Delta^{V} = +\ 5,512,$$

l berechnen daraus durch Subtraction die Δ für die einnen beobachteten Winkel, welche mit den H von S. 22. ammengesetzt geben:

$$H_1 + \Delta_1 = -0'',27 - 11'',98 = -12'',25$$
$$H_2 + \Delta_2 = -1,03 + 10,53 = +\ 9,50$$
$$H_3 + \Delta_3 = -0,26 +\ 7,31 = +\ 7,05$$
$$H_4 + \Delta_4 = -1,04 -\ 4,70 = -\ 5,74$$
$$H_5 + \Delta_5 = -0,27 +\ 4,67 = +\ 4,40$$
$$H_6 + \Delta_6 = -1,03 -\ 5,83 = -\ 6,86.$$

r Unterschied beträgt nirgends viel mehr als eine halbe cunde. Man verliert aber, wie gesagt, bei der Pothe-

not'schen Aufgabe, wenn man nach dem gegenwärtigen Be
spiele rechnet, wesentliche practische Vortheile ohne r
ellen Gewinn.

5) Das Abschliefsen des Horizontes ist, wie sch
§. 10. erwähnt, nun auch ein Geschäft, welches unter d
Regeln dieses Kapitels fällt; denn die Azimuthal-Rich
tungen der beobachteten Punkte sind als Elemente zu b
trachten, von denen die gemessenen Winkel abhängen. W
nehmen aber mit Fleifs davon hier jetzt kein Beispiel, so
dern versparen dies bis zum folgenden Kapitel, wo dan
auch Winkel von verschiedener Genauigkeit vorkommen u
wir dann alle Vorschriften und Vortheile, welche die pra
tische Geometrie lehrt, auf einmal erklären können.

§. 45.

Bisher ist bloſs der Hauptzweck verfolgt worden, d
definitiven Elemente zu finden, d. h. diejenigen, welch
$[vv]$ zu einem Minimum machten. Die Kenntnifs der Gröf
dieses $[vv]$ war für den Hauptzweck nicht nöthig. — Wen
wir aber diese Gröfse nun auch noch bestimmen, so läfst sic
dadurch der wichtige Nebenzweck erreichen, über die Ge
nauigkeit der Beobachtungen ein Urtheil zu e
mitteln. Zur Kenntnifs von $[vv]$ können wir, wie im Vor
gen nachgewiesen, immer gelangen, wenn wir die nac
§. 42. gewonnenen e in die Bedingungsgleichungen subst
tuiren. Damit soll aber nicht gesagt seyn, dafs es nich
auch noch andere Mittel gäbe, um $[vv]$ zu finden. Wir he
ben nur dieses eine Mittel deshalb hier heraus, weil es sic
nach dem gegenwärtigen Standpunkte unserer Kenntniss
ganz leicht, gleichsam von selbst, darbietet und setzen als
voraus, dafs wir nach Auffindung der definitiven Element
nachträglich jene Substitution gemacht und durch Quadrire

d Addiren, ganz so wie §. 20. an einem Beispiele ge-
gt wurde, das $[vv]$ gebildet hätten. Ist aber $[vv]$ be-
nt, so können wir ganz ähnlich damit verfahren, wie
15. und 16. geschehen ist.

Von einer mittleren Abweichung im Sinne des §. 15.
n hier nur in so fern die Rede seyn, als die Rückwärts-
rechnung aus den definitiven Elementen das dortige arith-
tische Mittel vertritt. Wir haben also die mittlere Ab-
ichung auch hier $\sqrt{\frac{[vv]}{z_0}}$ zu setzen.

Wollen wir aber den mittleren Fehler der Be-
achtungen schätzen, der wieder m genannt werden mag,
überlegen wir, dafs wir, ihn genau zu bestimmen, die
hren Elemente statt der definitiven kennen müfsten, um
ersteren die wirklich vorhandenen Beobachtungen rück-
rts zu berechnen und dann die Quadratsumme der Abwei-
ngen $= z_0 mm$ zu setzen.

Die wahren Elemente aber könnten wir nur finden, wenn
aufser den vorhandenen Beobachtungen noch z_e fehler-
e Beobachtungen gemacht hätten. Die Möglichkeit sol-
r fehlerfreien Beobachtungen läfst sich auch nicht läug-
n; ja wir werden bei ausgedehnten Beobachtungsreihen
vifs auch solche unter unseren wirklichen Beobachtungen
den; nur fehlt es uns an Mitteln, sie zu erkennen.

Denken wir nun aber, es wären z_e fehlerfreie Beobach-
gen noch aufser unserer Beobachtungsreihe wirklich vor-
nden; so würden sie doch, rückwärts berechnet aus un-
en definitiven Elementen, eine Abweichung zeigen,
l diese Abweichung müfsten wir $= \pm m$ schätzen, in-
n wir sie, in Ermangelung besserer Kenntnifs, gleich se-
n der Abweichung zwischen den wirklich gegebenen Be-

obachtungen und ihrer Berechnung aus den wahren El
menten.

Unser $[vv]$ gienge also durch das Hinzutreten der
neuen Beobachtungen über in $[vv] + z_e mm$. Diese ne
Summe wäre aber nur auf die vorhandenen z_o Beobachtu
gen zu vertheilen, weil die Hinzutretenden als fehlerfrei g
dacht werden sollen.

Demnach schätzen wir $z_o mm = [vv] + z_e mm$ oder

n. 35. $$m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_o - z_e}}.$$

Diese Formel stimmt ganz mit unserer n. 7 überein, wie
auch seyn mufs, indem wir directe Beobachtungen betrac
ten können als vermittelnde mit einem Elemente.

§. 46.

Zum Behufe unserer jetzigen Rechnungs-Be
spiele haben wir schon im §. 44. immer die v nachträ
lich berechnet; demnach haben wir:

zu 1) $[vv] = 930105$; $z_o = 6$; $z_e = 2$

und daraus

$$m = \sqrt{232526} = \pm 482 \text{ Milliontel-Toisen}$$
$$= \pm 0{,}42 \text{ Pariser Linien};$$

zu 2) $[vv] = 0{,}2026$; $z_o = 3$; $z_e = 2$

also

$$m = \sqrt{0{,}2026} = \pm 0'',45;$$

zu 4) $[vv] = 390{,}3019$; $z_o = 6$; $z_e = 2$

also

$$m = \sqrt{97{,}5755} = \pm 9'',88.$$

Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dafs dieses letz
m nur zur Uebung berechnet ist, wie das ganze Beispie

eil es aus den in dem §. 44. angeführten Gründen über die üte der gemessenen Winkel selbst nichts entscheidet.

§. 47.

Es ist jetzt noch das wichtige Geschäft übrig: die Genauigkeit der definitiven Elemente zu schätzen, e nach dem Verfahren des §. 42. gewonnen wurden.

Auch dazu mufs uns die Kenntnifs des $[vv]$ oder des raus abgeleiteten m verhelfen. Wir können zu dem Ende de beliebige Beobachtung o als Gewichts-Einheit annehen, weil alle als gleich genau vorausgesetzt sind, und han dann nur die Gewichte der definitiven Elemente zu bemmen. Sie mögen mit P_1; P_2; P_3 bezeichnet werden. nn werden wir nach n. 10 oder n. 15 gleich

$$\frac{m}{\sqrt{P_1}}; \quad \frac{m}{\sqrt{P_2}}; \quad \frac{m}{\sqrt{P_3}}$$

r die mittleren oder zu befürchtenden Fehler der Elemente kennen.

Zur Auffindung der $\frac{1}{P_1}$; $\frac{1}{P_2}$; $\frac{1}{P_3}$ schlagen wir nun ein Weg ein, der sich unmittelbar an unsere bisherigen Beachtungen anschliefst, ohne damit freilich sagen zu wolı, dafs es nicht noch andere Wege zu demselben Ziele be. (Wirklich sind deren noch vier andere bekannt, die r aber hier nicht verfolgen.)

Gehen wir nämlich auf unseren §. 38. zurück und naentlich auf die dort zum Grunde gelegte Differential-Gleiung

$$du = l_1 dt_1 + l_2 dt_2 + l_3 dt_3 + \ldots.$$

d bemerken wir, dafs für $p_1 = p_2 = p_3 \ldots\ldots = 1$ hiers unmittelbar nach n. 32 folgen würde: $\frac{1}{P} = [ll]$, so se-

hen wir gleich, worauf es uns gegenwärtig eigentlich a kommt.

Besäfsen wir nämlich z_e Differential-Gleichungen v der Form:

$$(3)\quad \begin{aligned} dE_1 &= \alpha_1 dO_1 + \alpha_2 dO_2 + \alpha_3 dO_3 + \alpha_4 dO_4 + \alpha_5 dO_5 \\ dE_2 &= \beta_1 dO_1 + \beta_2 dO_2 + \beta_3 dO_3 + \beta_4 dO_4 + \beta_5 dO_5 \\ dE_3 &= \gamma_1 dO_1 + \gamma_2 dO_2 + \gamma_3 dO_3 + \gamma_4 dO_4 + \gamma_5 dO_5, \end{aligned}$$

so wäre unser Problem gleich gelöst. Denn weil wir unse gleich genauen Beobachtungen selbst zu Gewichts-Einhe ten erklärt haben, so könnten wir auf der Stelle nach n. 3 setzen:

$$\frac{1}{P_1} = [\alpha\alpha]; \quad \frac{1}{P_2} = [\beta\beta]; \quad \frac{1}{P_3} = [\gamma\gamma].$$

Diese z_e Gleichungen (3) besitzen wir nun freilich nicht, ab wir besitzen statt derselben nach §. 42. doch z_o andere Gle chungen zwischen denselben Differentialen, die wir z Uebersicht hier wiederholen wollen, nämlich:

$$(2)\quad \begin{aligned} dO_1 &= a_1 dE_1 + b_1 dE_2 + c_1 dE_3 \\ dO_2 &= a_2 dE_1 + b_2 dE_2 + c_2 dE_3 \\ dO_3 &= a_3 dE_1 + b_3 dE_2 + c_3 dE_3 \\ dO_4 &= a_4 dE_1 + b_4 dE_2 + c_4 dE_3 \\ dO_5 &= a_5 dE_1 + b_5 dE_2 + c_5 dE_3. \end{aligned}$$

Wir sehen also ein, dafs, wenn wir aus den $z_o . z_e$ C efficienten der Gleichungen (2) die $z_e . z_o$ Coefficienten d Gleichungen (3) ableiteten, damit unser Zweck erreic seyn würde.

Die unmittelbare Ableitung aller einzelnen α, β, γ zu Behufe nachherigen Quadrirens und Addirens, würde ab nicht nur zu unerträglichen Weitläufigkeiten führen, so dern auch ganz unnöthig seyn, da wir am Ende doch n $[\alpha\alpha]$; $[\beta\beta]$; $[\gamma\gamma]$ zu wissen verlangen und diese letzt Werthe auf einem kürzeren Wege finden können.

Dazu bemerken wir zuerst eine allgemeine Eigenschaft unserer Gleichungen (3) und (2). Wenn wir nämlich der Reihe nach die erste von (2) mit α_1, die zweite mit α_2, die dritte mit α_3 u. s. w. multipliciren und dann alle z_0 Gleichungen addiren, so mufs die linke Seite der dadurch entstandenen Gleichung mit der rechten Seite von der ersten unserer Gleichungen (3) übereinstimmen; folglich mufs die rechte Seite der durch Summirung entstandenen Gleichung das dE_1 selbst seyn; d. h. die Summe der Coefficienten, welche nach der Multiplication bei dem dE_1 stehen, mufs $= 1$ seyn; dE_2 und dE_3 aber müssen durch das Multipliciren solche Coefficienten bekommen haben, die sich bei der Addition aufheben. Hieraus erhalten wir also schon z_e Gleichungen zwischen den Coefficienten, nämlich $[\alpha a] = 1$; $[\alpha b] = 0$; $[\alpha c] = 0$.

Wiederholen wir nun dasselbe Geschäft auch mit den β, dann mit den γ (und so fort mit allen übrigen Coefficienten in (3), falls $z_e > 3$ wäre), so entstehen jedesmal ähnliche Gleichungen. Wir haben also am Ende eine Gruppe von $z_e z_e$ Gleichungen, die wir zu künftigem Gebrauche in diesem §. mit (4) bezeichnen wollen:

$$(4)\quad \begin{array}{lll} [\alpha a] = 1; & [\alpha b] = 0; & [\alpha c] = 0 \\ [\beta a] = 0; & [\beta b] = 1; & [\beta c] = 0 \\ [\gamma a] = 0; & [\gamma b] = 0; & [\gamma c] = 1. \end{array}$$

Wir bemerken ferner, dafs unsere Gleichungen (2) eigentlich nichts sind, und vom Anfange an nichts weiter waren, als die allgemeine Form, worin sich die gegenseitige Abhängigkeit der dO und dE darstellt. Im §. 42. specialisirten wir sie nun dadurch, dafs wir $dO = o - O = -n$ setzten, daraus unsere Bedingungsgleichungen erhielten, aus diesen, zu Erfüllung des Zweckes dafs $[vv]$ ein Minimum

werde, die Normalgleichungen bildeten und endlich unser bestimmten Zahlenwerthe e für dE ableiteten. Wir sehe also leicht ein, dafs wir auch die nach dem Principe de kleinsten Quadrate zu bestimmenden dE, in allgemeinen Aus drücken durch die dO ausgedrückt, werden finden könner wenn wir nur jene Specialisirung unterlassen, sonst aber die selben Multiplicationen und Additionen vornehmen, die un oben zu den Normalgleichungen führten; kurz, wenn wir i den Normalgleichungen überall wieder die n mit den — d vertauschen und darauf verzichten, bestimmte Zahlen-Werth e für die dE zu finden. Dadurch erhalten wir nun an de Stelle von n. 34

$$
\begin{aligned}
0 &= -[adO] + [aa]\,dE_1 + [ab]\,dE_2 + [ac]\,dE_3 \\
0 &= -[bdO] + [ab]\,dE_1 + [bb]\,dE_2 + [bc]\,dE_3 \\
0 &= -[cdO] + [ac]\,dE_1 + [bc]\,dE_2 + [cc]\,dE_3 .
\end{aligned} \tag{5}
$$

Wir sehen nun weiter sogleich, dafs die Elimination au diesen Gleichungen (5) uns jedes einzelne dE in allgemei nen Ausdrücken geben mufs, oder mit anderen Worten, daf wir nun im Stande sind, die Coefficienten der Gleichunge (3) zu bestimmen. Wollen wir aber alle unnöthigen Weit läufigkeiten vermeiden, so ist es nicht mehr gleichgültig welche von den vielen zu Gebote stehenden Eliminations Methoden wir gebrauchen; sondern wir müssen uns an ein bestimmte Methode, die der Eliminations-Coefficienten, hal ten. Wir multipliciren also unsere Gleichungen (5) de Reihe nach mit den vorerst noch unbestimmten Coefficiente q_1; q_2; q_3; und addiren.

Dadurch erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
0 = &-[adO]\,q_1 + [aa]\,q_1 dE_1 + [ab]\,q_1 dE_2 + [ac]\,q_1 dE \\
&-[bdO]\,q_2 + [ab]\,q_2 dE_1 + [bb]\,q_2 dE_2 + [bc]\,q_2 dE \\
&-[cdO]\,q_3 + [ac]\,q_3 dE_1 + [bc]\,q_3 dE_2 + [cc]\,q_3 dE_3
\end{aligned} \tag{6}
$$

oll nun ein bestimmtes dE z. B. dE_1 gefunden werden, so üssen den Eliminations-Coefficienten solche Werthe bei-elegt werden, dafs die Summe der Coefficienten, welche ei dE_1 stehen, $= 1$ wird, die Summen bei dE_2 und dE_3 aber = 0 werden.

Dies giebt also die drei (allgem. z_e) Gleichungen:

$$[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 = 1$$
$$[ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 = 0$$
$$[ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 = 0.$$

Wir bemerken sofort, dafs die Coefficienten der q hier keine nderen sind, als die wir bei den Normalgleichungen schon atten und dafs dies wegen der symmetrischen Beschaffen-eit derselben nothwendig ist.

Haben wir nun vermittelst irgend einer beliebigen Eli-inations-Methode die q_1; q_2; q_3 in Zahlen gefunden, so ann durch Substitution der q in die Gleichungen (6) die rste der Gleichungen (3) für dE_1 in Zahlen ausgedrückt erden. Wollen wir aber alle Gleichungen (3) in Zahlen erstellen, so haben wir z_e solche Gruppen zu bilden, welche ann auch jedesmal andere Zahlen-Werthe für die q geben. iese Gruppen wollen wir also dadurch von einander unter-cheiden, dafs wir dasjenige q, welches einem bestimmten E den Coefficienten 1 verschaffen soll, mit einem grofsen uchstaben schreiben. Wir wollen auch diese Gleichungen, eil wir sie demnächst allein practisch zu brauchen haben, it dem Namen Gewichts-Gleichungen belegen und e numeriren.

Nach diesem Allen wären also (beispielsweise für drei lemente) unsere Gewichts-Gleichungen folgende:

$$
\begin{array}{rl}
 & 0 = -1 + [aa]\,Q_1 + [ab]\,q_2 + [ac]\,q_3 \\
\text{I.} & 0 = \quad 0 + [ab]\,Q_1 + [bb]\,q_2 + [bc]\,q_3 \\
 & 0 = \quad 0 + [ac]\,Q_1 + [bc]\,q_2 + [cc]\,q_3 \\
 & \\
 & 0 = \quad 0 + [aa]\,q_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,q_3 \\
\text{II.} & 0 = -1 + [ab]\,q_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,q_3 \\
 & 0 = \quad 0 + [ac]\,q_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,q_3 \\
 & \\
 & 0 = \quad 0 + [aa]\,q_1 + [ab]\,q_2 + [ac]\,Q_3 \\
\text{III.} & 0 = \quad 0 + [ab]\,q_1 + [bb]\,q_2 + [bc]\,Q_3 \\
 & 0 = -1 + [ac]\,q_1 + [bc]\,q_2 + [cc]\,Q_3 .
\end{array}
$$

n. 36.

Nun erkennen wir endlich leicht, dafs durch die (belie big auszuführende) Elimination aus den Gewichts-Gleichun gen unser Problem gelöst ist. Denn nehmen wir z. B. da $\mathrm{d}E_1$ erst allein vor und setzen in (6) also Q_1 an die Stell von q_1, so haben wir sogleich:

$$\mathrm{d}E_1 = [a\mathrm{d}O]Q_1 + [b\mathrm{d}O]q_2 + [c\mathrm{d}O]q_3$$

d. h. also eine Gleichung zwischen $\mathrm{d}E_1$ und sämmtlichen $\mathrm{d}O$ mit lauter Zahlen-Coefficienten. Entwickeln wir diese Glei chung, so dafs die $\mathrm{d}O$ einzeln hervortreten, so kommt:

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{d}E_1 = & (a_1Q_1 + b_1q_2 + c_1q_3)\,\mathrm{d}O_1 \\
 & + (a_2Q_1 + b_2q_2 + c_2q_3)\,\mathrm{d}O_2 \\
(7) & + (a_3Q_1 + b_3q_2 + c_3q_3)\,\mathrm{d}O_3 \\
 & + (a_4Q_1 + b_4q_2 + c_4q_3)\,\mathrm{d}O_4 \\
 & + (a_5Q_1 + b_5q_2 + c_5q_3)\,\mathrm{d}O_5 .
\end{array}
$$

Vergleichen wir aber diesen Ausdruck mit der ersten Glei chung von (3), so sehen wir, dafs nun alle α gefunden sind so dafs wir es in unserer Gewalt hätten, ihre Zahlen-Werthe zu berechnen. Es ist nämlich:

$$
\begin{array}{rl}
 & \alpha_1 = a_1Q_1 + b_1q_2 + c_1q_3 \\
 & \alpha_2 = a_2Q_1 + b_2q_2 + c_2q_3 \\
(8) & \alpha_3 = a_3Q_1 + b_3q_2 + c_3q_3 \\
 & \alpha_4 = a_4Q_1 + b_4q_2 + c_4q_3 \\
 & \alpha_5 = a_5Q_1 + b_5q_2 + c_5q_3 .
\end{array}
$$

Hieraus läfst sich nun aber auch, ohne Berechnung der Zahlen-Werthe für die einzelnen α, mit gröfster Leichtigkeit das $[\alpha\alpha]$ bilden, worauf es eigentlich allein ankommt. Wir brauchen nämlich nur die erste der Gleichungen (8) mit α_1, die zweite mit α_2 u. s. w. zu multipliciren und zu addiren; so erhalten wir:

$$[\alpha\alpha] = [\alpha a]Q_1 + [\alpha b]q_2 + [\alpha c]q_3 .$$

Blicken wir nun aber zurück auf unsere Gleichungen (4), die wir uns zu dem Ende bereit gestellt haben, so finden wir endlich, indem wir für dE_2 und dE_3 nun eben so verfahren, wie oben für dE_1:

$$\text{n. 37.} \qquad \begin{aligned} [\alpha\alpha] &= Q_1 = \tfrac{1}{P_1} \\ [\beta\beta] &= Q_2 = \tfrac{1}{P_2} \\ [\gamma\gamma] &= Q_3 = \tfrac{1}{P_3} . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun ferner noch die mittleren Fehler der Elemente mit ε_1; ε_2; ε_3; so haben wir endlich

$$\text{n. 38.} \qquad \varepsilon_1 = m\sqrt{Q_1}\,; \quad \varepsilon_2 = m\sqrt{Q_2}\,; \quad \varepsilon_3 = m\sqrt{Q_3} .$$

Es bedarf wohl nicht mehr der Bemerkung, dafs die Q als Summen von Quadraten alle positiv seyn müssen.

§. 48.

Ehe wir zu Beispielen übergehen, ist es zweckmäfsig, einige Bemerkungen zu machen, welche uns die Uebersicht erleichtern.

Wir sehen hier zuerst, dafs das im vorigen §. entwickelte Verfahren uns das Gewicht jedes einzelnen Elementes abgesondert giebt, und dafs wir zu diesem Zwecke blofs das betreffende Q zu finden brauchen, indem wir die zugehörigen q aus den betreffenden Gewichts-Gleichungen eli-

miniren. Um die Zahlen-Werthe dieser q brauchen wi uns dann eigentlich gar nicht mehr zu bekümmern, wen wir sie nicht etwa zur Prüfung unserer Rechnung gebrauchen wollen, oder wenn wir etwa einen besonderen (der gegenwärtigen Aufgabe aber fremden) Grund hätten, die betreffenden Gleichungen (3) in Zahlen herzustellen.

Wir bemerken auch, wie die Auffindung der Q uns dadurch sehr erleichtert ist, dafs die Gewichts-Gleichunge mit den Normalgleichungen in allen Coefficienten übereinstimmen und nur die absoluten Glieder geändert sind. Demnach werden wir auch einen grofsen Theil der Rechnung die oben unser siebentes Geschäft ausmachte, unverändert beibehalten können; und die ganze Entwickelung des vorigen § fällt nun in die einfache practische Regel zusammen:

> Um für ein gewisses Element E_n das Gewicht P_n zu finden, setze man in der für E_n abgeleiteten Normalgleichung — 1 an die Stelle des absoluten Gliedes; in allen übrigen Normalgleichungen setze man 0 an die Stelle der absoluten Glieder. Sodann setze man Q_n an die Stelle von dE_n und ein q an die Stelle von einem jeden anderen dE. Endlich eliminire man die q, so kommt $Q_n = \frac{1}{P_n}$.

Demnach können wir nun unsere in §. 43. aufgestellte Uebersicht durch Beifügung der fünf nachträglichen Geschäfte vervollständigen, indem wir uns die Aufgabe setzen:

IV. nachträglich:
8) die v zu suchen,
9) das $[vv]$ zu bilden,
10) das m nach n. 35 zu berechnen,
11) die Gewichts-Gleichungen zu bilden,
12) die Q durch Elimination und daraus die ε zu suchen.

§. 49.

Kehren wir nun zu unseren Rechnungs-Beispielen der §. 44. und 46. zurück, so haben wir:

Zu 1) schon das achte, neunte und zehnte Geschäft gelegentlich verrichtet und damals gefunden $m = 0{,}482$.

Das elfte Geschäft giebt uns aus den Normalgleichungen des §. 44. die Gewichtsgleichungen:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} 0 &= -1 + 4Q_1 + 2q_2 \\ 0 &= 0 + 2Q_1 + 4q_2 \end{aligned}$$

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} 0 &= 0 + 4q_1 + 2Q_2 \\ 0 &= -1 + 2q_1 + 4Q_2 . \end{aligned}$$

Das zwölfte Geschäft verrichten wir wie im §. 44. und finden

$$0 = +2 - 6Q_1 \qquad 0 = +2 - 6Q_2$$
$$Q_1 = \tfrac{1}{3} \qquad Q_2 = \tfrac{1}{3}$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 482\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 278 \text{ Milliontel-Toisen}$$
$$= \pm 0{,}24 \text{ pariser Linien.}$$

Zu 2) sind auch die früheren Geschäfte schon verrichtet und wir haben also nur die Gewichtsgleichungen aus den obigen Normalgleichungen zu bilden. Wir erhalten

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} 0 &= -1 + 75498\, Q_1 - 19871\, q_2 \\ 0 &= 0 - 19871\, Q_1 + 8047\, q_2 \end{aligned}$$

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} 0 &= 0 + 75498\, q_1 - 19871\, Q_2 \\ 0 &= -1 - 19871\, q_1 + 8047\, Q_2 . \end{aligned}$$

Die Elimination wollen wir hier noch einmal ausführlich herzetzen und dabei diejenigen Ziffern mit anderer Schrift drucken lassen, welche wir aus der Elimination des §. 44. nur abzuschreiben brauchen.

Also zu I.

	0,00000 n		4,87794	4,29822 n
	$-\infty$		4,29822 n	3,90563
	5,70178		0,57972 n	
	$-\infty$		0,39259 n	
$0 =$	$+0,0000503244$		$-3,79945\,Q_1$	$+q_2$
$0 =$	0		$-2,46939\,Q_1$	$+q_2$
$0 =$	$+0,0000503244$		$-1,33006\,Q_1$	
	5,70178		0,12687 n	

$lg\,Q_1 \ldots 5,57791$

also $Q_1 = \frac{1}{P_1} = 0,0000378364$.

Wir bemerken hier noch, dafs unser Aufschlagen für das absolute Glied in der ersten Columne durchaus überflüssig war, und werden also in Zukunft blofs *num.* an die Stelle schreiben.

Wir bekommen so für II.

	$-\infty$		4,87794	4,29822 n
	0,00000 n		4,29822 n	3,90563
	$-\infty$			9,42028 n
	5,70178			9,60741 n
$0 =$	0	$+$	q_1	$-0,263194\,Q_2$
$0 =+$	*num.*	$+$	q_1	$-0,404955\,Q_2$
$0 =-$	*num.*			$+0,141761\,Q_2$
	5,70178 n			9,15156

$lg\,Q_2 \ldots 6,55022$

also $Q_2 = \frac{1}{P^2} = 0,0003549917$.

Ehe wir mit diesen letzten Werthen von Q_1 und Q_2 weiter rechnen, müssen wir im Rückblick auf unseren §. 40. uns fragen, welche Bewandnifs es mit der Gewichts-Einheit

r unsere Elemente hat. Da sehen wir nun freilich leicht
n, dafs in diesem letzten Beispiele nach der ursprünglichen
nlage unserer Rechnung, namentlich der Gleichungen (2),
e Secunde für die Winkel und die Toise für die Längen-
aafse als Benennung der Gewichts-Einheit schon festge-
tzt sind. Aber wir erinnern uns auch, dafs wir im Laufe
:r Arbeit einmal von dieser Festsetzung eine zeitlang ab-
ichen, indem wir bei Aufstellung der Normalgleichungen
e Tausendtel-Toisen gebrauchten und erst nach Auffin-
ıng der dx und dy wieder zu den ganzen Toisen zurück-
ehrten.

Diese Abweichung hat aber offenbar ihren vollen Ein-
ufs auf die Berechnung unserer Q geäufsert; denn wir ha-
en die Normalgleichungen ohne Weiteres in Gewichts-Glei-
ıungen umgesetzt, ohne an jene Abweichung zu denken.
emnach dürfen wir mit den eben aufgefundenen Zahlen-
Verthen nicht ohne Weiteres fortrechnen, sondern wir müs-
:n sie, um zu der wahren Bedeutung der Q zurückzukeh-
:n, erst mit 1000 dividiren, wie wir oben beim Uebergange
ıf die e die dx und dy dividirten; so dafs also nach dieser
erichtigung wird

$$\log Q_1 = 2{,}57791$$
$$\log Q_2 = 3{,}55022,$$

nd erhalten dann die ε in Toisen, wie ursprünglich voraus-
esetzt war. So kommt also

$\log m$	9,65332	nach §. 46.
$\frac{1}{2}\log Q_1$	6,28896	
$\frac{1}{2}\log Q_2$	6,77511	
$\log \varepsilon_1$ . . .	5,94228	
$\log \varepsilon_2$ . . .	6,42843	

und demnach

$\varepsilon_1 = \pm 0{,}00008755$ Toisen $\quad \varepsilon_2 = \pm 0{,}00026818$ Toise
$= \pm 0{,}0756$ Paris. Lin. $\quad = \pm 0{,}2317$ Paris. Lin.

Die Abscisse ist also dreimal so genau bestimmt als die Ordinate.

Fänden wir es zu unserer Uebung noch nöthig, auch das vierte Beispiel des §. 44. so zu Ende zu rechnen, so brauchten wir die zuletzt erwähnten Gewichts-Reductionen nicht vorzunehmen, weil wir uns dort keine Abweichung von der ursprünglichen Festsetzung erlaubt hatten, und bekämen also die ε in Pariser Fufs ausgedrückt.

§. 50.

Eine Frage kann nun unter Umständen doch noch übrig bleiben, wenn alle anderen in diesem Kapitel aufgeworfenen auch beantwortet sind, nämlich die nach der Genauigkeit anderer Gröfsen, die als Functionen der Elemente aus ihnen berechnet werden sollen.

Diese Frage kommt zwar vorzugsweise dann zur Sprache, wenn die Zeit bei der Berechnung mit ins Spiel tritt; also namentlich in der Astronomie, wenn aus einer gewissen Anzahl von Beobachtungen Elemente bestimmt sind, aus denen für andere Zeiten andere Beobachtungen berechnet werden sollen. In der practischen Geometrie, wo die Beobachtungs-Objecte unbeweglich sind, kommt diese Frage verhältnifsmäfsig seltener vor; wir müssen sie aber für solche Fälle uns doch zu beantworten wissen.

Dazu bedarf es jetzt nur noch eines Rückblickes auf unseren §. 38. Wenn nämlich u irgend eine beliebige bekannte Function der Elemente ist, so mufs eine Gleichung

n der allgemeinen Form $0 = F(u; E_1; E_2; E_3)$ gege-
n seyn. Suchen wir also hier wie dort die partiellen Dif-
rentialquotienten dieser Gleichung, die hier mit h_1; h_2; h_3
zeichnet werden mögen, so haben wir

$$du = h_1\,dE_1 + h_2\,dE_2 + h_3\,dE_3$$

d also, wenn wir den mittleren Fehler von u mit $\mathfrak{m}$ und
s Gewicht von u mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m} = h_1 h_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 + h_2 h_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2 + h_3 h_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3$$

n. 39. $$\mathfrak{m} = \sqrt{[hh\varepsilon\varepsilon]}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{h_1 h_1}{P_1} + \frac{h_2 h_2}{P_2} + \frac{h_3 h_3}{P_3}$$

n. 40. $$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \left[\frac{hh}{P}\right],$$

ıs ganz mit unseren n. 29 und n. 30 übereinstimmt.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dafs diese bei-
n letzten Formeln auch unmittelbar anwendbar bleiben,
ınn die Beobachtungen selbst auch von verschiedener Ge-
uigkeit gewesen wären, da es nur auf die daraus erhalte-
n ε und P ankommt. Dieser §. gilt also auch für das fol-
nde Kapitel und brauchen wir also in diesem Abschnitte
in besonderes Kapitel über die Genauigkeit der Functio-
n mehr beizufügen.

§. 51.

Rechnungs-Beispiele zum vorigen §. können
r aus dem §. 44. und 49. entlehnen.

Zu 1) Wir hatten für die definitiven Elemente gefunden

$$E_1 = 9{,}379271; \quad E_2 = 8{,}746283.$$

Fragen wir nun nach der Genauigkeit der daraus abge-
iteten Summe

$$E_1 + E_2 = 18{,}125554,$$

so haben wir $h_1 = 1$ und $h_2 = 1$; es war aber §. 49.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 278.$$

Also ist nach n. 39. $\mathfrak{m} = 278\sqrt{2}$

$= \pm 393$ Milliontel-Toisen

$= \pm 0{,}36$ Pariser Linien.

Zu 2) Wir haben §. 44 und 49 gefunden

$$E_1 = x = 20{,}414249; \quad \varepsilon_1 = \pm 0{,}00008755$$
$$E_2 = y = 36{,}946013; \quad \varepsilon_2 = \pm 0{,}00026818.$$

Die ganze Arbeit war aber, wie oben erwähnt, unternom men, um die Centrirungs-Elemente $KAT = V$ und $AK =$ zu finden. Diese Auffindung selbst bewirken wir durch ein leichte Abänderung in den letzten Ziffern der letzten Co lumne unserer ursprünglichen Rechnung beim vierten Ge schäft in §. 44. Es wird demnach durch Einführung de definitiven Elemente

$$\begin{array}{rcl} y & \ldots\ldots & 1{,}5675676 \\ (x-D) & \ldots\ldots & \underline{1{,}3099334} \\ & & 0{,}2576342 \\ V & = & 61^\circ 4' 38'',91 = o_3 + v_3 \\ & & 9{,}9421443 \\ & & \underline{9{,}6845101} \\ & & 1{,}6254233 \\ R & = & 42{,}210768. \end{array}$$

Nun aber sind, damit der Zweck vollständig erreicht sey auch noch die mittleren Fehler für diese beiden Gröſsen zu finden, und also zuerst die Gleichungen

$$tang\, V = \frac{y}{x} \text{ und } R^2 = x^2 + y^2$$

zu differentiiren. Dies giebt, für die erste nach (2) in

44., für die zweite durch unmittelbare Differentiation
ıd Einführung der Werthe $\frac{x}{R} = cos\, V$ und $\frac{y}{R} = sin\, V$

$$dV = -\frac{\varrho\, sin\, V}{R}\, dx + \frac{\varrho\, cos\, V}{R}\, dy$$
$$dR = cos\, V\, dx + sin\, V\, dy.$$

ir gebrauchen also nur solche Logarithmen, die wir in der
üheren Rechnung schon fertig vor uns haben, und rech-
ın also

	für V	für R
$log\, h_1$	3,63115 n	9,68451
$log\, \varepsilon_1$	5,94228	5,94228
	9,57343 n	5,62679
	9,14686	1,25358
$h_1 h_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 =$	0,140231	0,000000001793
$log\, h_2$	3,37351	9,94214
$log\, \varepsilon_2$	6,42843	6,42843
	9,80194	6,37057
	9,60388	2,74114
$h_2 h_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2 =$	0,401682	0,000000055099
$[hh\,\varepsilon\varepsilon] =$	0,541913	0,000000056892
$m =$	$\pm 0'',736$	$= \pm 0{,}0002385$ Toisen
		$= \pm 0{,}206$ Par. Linien.

ie Centrirungs-Elemente sind also viel schärfer gefun-
ın, als sie sich in dem Thurme selbst hätten finden lassen,
o man den Mittelpunkt des Knopfes nicht sieht und ihn
so nur aus den, als symmetrisch vorausgesetzten, Dimen-
ınen des Gebälkes zu schätzen, d. h. mit anderen Worten,
ch mit der Genauigkeit einer Zimmermanns-Arbeit zu be-
nügen hat.

Dieses Beispiel giebt denn gelegentlich auch einen Be-
g zu der Regel der practischen Geometrie: die Gröfse der

Centrirungen an und für sich hat man für keinen Nachthe
zu halten, dagegen auf die Genauigkeit, womit man di
Centrirungs-Elemente messen kann, alle Aufmerksamke
zu wenden.

Uebrigens sehen wir leicht, dafs die Rechnung diese
§. für dieses letzte Beispiel erspart worden wäre, wenn wi
vom Anfange an nach der §. 44. unter 3) angedeutete
Weise die Arbeit angelegt hätten, wo dann die Gröfse
welche wir hier mit m bezeichnet haben, als ε aufgetrete
wären.

Fünftes Kapitel.

Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

§. 52.

Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit erfor
dern, dafs wir das für gleichgenaue Beobachtungen im vo
rigen Kapitel ausführlich entwickelte Verfahren, welche
wir sonst im Allgemeinen wieder zu befolgen haben, nur i
einigen Punkten modificiren, weshalb wir uns hier auch de
sto kürzer fassen können.

Von unseren sieben Hauptgeschäften des §. 42. habe
wir nämlich die fünf ersten unverändert beizubehalten; denn
wir müssen auch hier erst vor Allem uns unterrichten, wel
chen Gleichungen genau Genüge zu leisten seyn würde
wenn die Beobachtungen fehlerfrei wären; d. h. wir müsse
uns vorerst die Widersprüche klar machen, ehe wir sie weg-
zuschaffen unternehmen.

Bei dem Uebergange von den Bedingungsgleichungen
i den Normalgleichungen aber, also im sechsten Geschäfte,
itt die Nothwendigkeit einer Modification ein, auf welche
ir schon von §. 8. her vorbereitet sind. — Wir müssen
is nämlich daran erinnern, dafs jede Beobachtung ihr be-
nderes Gewicht und ihren besonderen mittleren Fehler hat.
ie Gewichte der Beobachtungen wollen wir wieder mit
; p_2; p_3 ... die mittleren Fehler aber mit m_1; m_2; m_3 ...
zeichnen, wie im §. 24. und 25, und als Gewichts-Ein-
it eine Beobachtung denken, die mit dem mittleren Feh-
: m behaftet wäre, wobei wir nur, falls etwa heterogene
öfsen beobachtet wären, die Bemerkungen des §. 40. zu
achten haben. Nun sehen wir also leicht ein, dafs es
rauf ankommt $\left[\frac{vv}{mm}\right]$ oder $[pvv]$ zu einem Minimum
machen, (weil es im Allgemeinen unmöglich ist, dafs
n Bedingungsgleichungen allen zugleich Genüge ge-
ıehe).

Der Ausdruck $[pvv]$ ist aber nach §. 8. entstanden zu
nken aus $[v\sqrt{p}\,.\,v\sqrt{p}] = (v_1\sqrt{p_1}\,.\,v_1\sqrt{p_1} + v_2\sqrt{p_2}\,.\,v_2\sqrt{p_2}$
$v_3\sqrt{p_3}\,.\,v_3\sqrt{p_3} + \ldots)$. Es ist also jedes v, d. h. in all-
meinen Ausdrücken jede Bedingungsgleichung, erst mit
m zugehörigen $\sqrt{p}$ zu multipliciren, ehe etwas Weiteres
rgenommen wird. Wir erhalten auf diese Weise:

$$v_1v_1 = (\sqrt{p_1}\,.\,n_1 + \sqrt{p_1}\,.\,a_1\mathrm{d}E_1 + \sqrt{p_1}\,.\,b_1\mathrm{d}E_2 + \sqrt{p_1}\,.\,c_1\mathrm{d}E_3)^2$$
$$v_2v_2 = (\sqrt{p_2}\,.\,n_2 + \sqrt{p_2}\,.\,a_2\mathrm{d}E_1 + \sqrt{p_2}\,.\,b_2\mathrm{d}E_2 + \sqrt{p_2}\,.\,c_2\mathrm{d}E_3)^2$$

u. s. w.

mnach bekommen wir nun bei Bildung des ersten partiel-
ı Differential-Quotienten,

$$\frac{[vv]}{E_1} = 2(\sqrt{p_1}\,.\,n_1 + \sqrt{p_1}\,.\,a_1\mathrm{d}E_1 + \sqrt{p_1}\,.\,b_1\mathrm{d}E_2 + \sqrt{p_1}\,.\,c_1\mathrm{d}E_3)\sqrt{p_1}\,.\,a_1$$
$$+ 2(\sqrt{p_2}\,.\,n_2 + \sqrt{p_2}\,.\,a_2\mathrm{d}E_1 + \sqrt{p_2}\,.\,b_2\mathrm{d}E_2 + \sqrt{p_2}\,.\,c_2\mathrm{d}E_3)\sqrt{p_2}\,.\,a_2$$

u. s. w.

und ganz ähnliche Ausdrücke ergeben sich bei den folgen
den Quotienten. Setzt man dann diese Ausdrücke = 0
streicht die dadurch überflüssig werdenden Factoren 2, zieh
die $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$ in p zusammen, und addirt; so entstehen di
Normalgleichungen

n. 41.
$$0 = [pan] + [paa]\,dE_1 + [pab]\,dE_2 + [pac]\,dE_3$$
$$0 = [pbn] + [pab]\,dE_1 + [pbb]\,dE_2 + [pbc]\,dE_3$$
$$0 = [pcn] + [pac]\,dE_1 + [pbc]\,dE_2 + [pcc]\,dE_3,$$

und die hier anzubringende Modification läfst sich also i
folgender einfacher practischer Regel aussprechen:

> Wenn die Beobachtungen nicht gleich genau sin
> so bilde man beim Uebergange von den Bedingungs
> gleichungen zu den Normalgleichungen die Pro
> ducte noch eben so, als ob sie gleich genau wä
> ren. Ehe man aber addirt, multiplicire man je
> des Product mit dem Gewichte der entsprechende
> Beobachtung.

Die Elimination geschieht dann natürlich eben so, als o
diese Abänderung nicht eingetreten wäre.

§. 53.

Zum Rechnungs-Beispiele wollen wir hier da
zweite Beispiel des §. 44. noch einmal vornehmen, um s
mehr als es uns Gelegenheit giebt, noch eine weitere prac
tische Bemerkung anzuknüpfen.

Oben wurden die Beobachtungen o_1; o_2; o_3 als gleic
genau vorausgesetzt. Das war aber in der Wirklichkeit nicl
der Fall. Vielmehr waren die Repetitions-Zahlen d
Reihe nach 20; 35; 48. Demnach hätte mit Zugrundl
gung der einfachen Beobachtung als Gewichts-Einheit e
gentlich gesetzt werden müssen:

$p_1 = 20;\ p_2 = 35;\ p_3 = 48.$

ie Multiplication mit diesen Zahlen würde aber unbequem
eyn, und ich setze dafür also

$$p_1 = 22;\ p_2 = 33;\ p_3 = 44,$$

der, da die Gewichts-Einheit willkührlich ist, nach Di-
ision mit 11

$$p_1 = 2;\ p_2 = 3;\ p_3 = 4.$$

ine solche willkührliche Abänderung der Gewichtszahlen
ann man sich in der Praxis nämlich unbedenklich immer
rlauben, wenn man es in seiner Gewalt hat Zahlen zu fin-
en, die von denen, in welchen die Gewichte ursprünglich
ngegeben sind, so wenig abweichen, dafs die Verände-
ng, welche dadurch stillschweigend in dem vorausgesetz-
n mittleren Fehler der Beobachtungen vorgenommen wird,
ls unbedeutend erscheint in Beziehung auf die Unsicher-
eit, welche demselben nach der Natur der Sache ohnehin
nklebt. In gegenwärtigem Falle wäre also z. B. bei der
rsten Beobachtung nach n. 15 der mittlere Fehler eigent-
ch im Verhältnisse $\sqrt{\frac{10}{11}} = 0{,}9535$ verkleinert; und wenn
ir ihn also sonst nach den Umständen z. B. $= 1''$ hätten
chätzen dürfen, so würde statt dessen $0'',95$ jetzt gesetzt
eyn, was meistentheils practisch gleichbedeutend seyn
ird. — Die Anwendung solcher, ursprünglich der Be-
uemlichkeit wegen eingeführten, willkührlichen Abände-
ng ist nun aber um so mehr erlaubt, wenn noch andere
Jmstände hinzukommen, welche die Schätzung der p an
ich unsicher machen. Gerade in unserem Falle lagen nun
olche vor; denn die Aufstellung war auf allen drei Punkten
on verschiedener Zuverlässigkeit, und waren also in Er-
angelung besonderer Beobachtungsreihen für die Bestim-

mung der m, die Repetitionszahlen doch nur ziemlich en fernte Annäherungen für die p.

Rechnen wir also mit $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 4$; s kommt

für $[pan]$	für $[paa]$	für $[pab]$	für $[pbn]$	für $[pbb]$
— 17240,80	+ 61862800	— 3831660	+ 1067,88	+ 2373
— 13839,30	+ 78817200	— 23540400	+ 4133,34	+ 70307
— 21214,52	+ 73175200	— 40431600	+ 11721,60	+ 223400
— 52294,62	+ 213855200	— 67803660	+ 16922,82	+ 296080

also sind jetzt die Normalgleichungen:

$$0 = -52294{,}62 + 213855\,dx - 67804\,dy$$
$$0 = +16922{,}82 - 67804\,dx + 29608\,dy.$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination und Substitution:

$$dx = +0{,}23114 \qquad dy = -0{,}04225$$
$$e_1 = 0{,}000231 \qquad e_2 = -0{,}000042$$
$$x = 20{,}414231 \qquad y = 36{,}945958$$
$$v_1 = +0{,}25$$
$$v_2 = -0{,}35$$
$$v_3 = +0{,}15.$$

§. 54.

Zur Bestimmung der Genauigkeit der einzelne Beobachtungen müssen wir die Schlufsfolgerungen des §. 25 mit denen des §. 45. verbinden. Bezeichnen wir nämlich auch hier die mittleren Fehler der Gewichtseinheit mit m so haben wir gleich nach n. 14

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}};\ m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}};\ m_3 = \frac{m}{\sqrt{p_3}} \text{ u. s. w.}$$

Wir brauchen uns also zunächst nur mit Aufsuchung des m zu beschäftigen.

Dazu sind uns aber nur die Verbesserungen v gegeben durch welche unsere wirklich angestellten Beobachtunge auf die aus den definitiven Elementen berechneten zurück

eführt werden. Wir fragen also zuerst, wie die Abweichungen ausgefallen wären, wenn statt der wirklichen Beobachtungen jedesmal die Gewichts-Einheit beobachtet wäre, und bezeichnen die Unterschiede zwischen diesen ingirten Beobachtungen und der Berechnung aus den definitiven Elementen einstweilen wieder mit δ_1; δ_2; δ_3 u. s. w. Die δ können wir nun in Ermangelung besserer Kenntnifs nur dadurch schätzen, dafs wir ihr Verhältnifs zu den entsprechenden v gleich setzen dem Verhältnisse zwischen den entsprechenden Abweichungen, welche sich ergeben haben würden, wenn wir beiderseits nicht nach den definitiven Elementen, sondern nach den wahren Flementen gerechnet hätten; d. h. wir müssen schätzen $\frac{\delta_1}{v_1} = \frac{m}{m_1}$; $\frac{\delta_2}{v_2} = \frac{m}{m_2}$ u. s. w. Daraus erhalten wir also am Ende wieder

$$z_0\delta\delta = p_1v_1v_1 + p_2v_2v_2 + p_3v_3v_3 + \ldots = [pvv].$$

Den Uebergang auf das gesuchte m können wir hier nun ferner durch dieselben Schlüsse vermitteln, die wir im §. 45. machten. Wir fingiren also noch weitere z_e fehlerfreie Beobachtungen der Gewichts-Einheit, welche uns zur Kenntnifs der wahren Elemente verhelfen müfsten, und finden, dafs durch das Hinzutreten derselben unser $z_0\delta\delta$ sich um $z_e mm$ vergröfsern würde, dafs aber dann diese neue Summe blofs auf die früher fingirten nicht fehlerfreien z_0 Beobachtungen der Gewichts-Einheit zu vertheilen wäre. So erhalten wir denn

$$z_0 mm = [pvv] + z_e mm$$

n. 42. $$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{z_0 - z_e}}.$$

Wie diese Formel auf n. 35 und n. 17 zurückführt, braucht wohl nicht weiter entwickelt zu werden.

Wir sehen also rücksichtlich der nachträglichen Geschäfte des §. 48. nun schon, dafs das achte Geschäft un-

verändert bleibt, dafs bei dem neunten aber nicht $[vv]$, son dern $[pvv]$ zu bilden ist, und dafs dann das zehnte Ge schäft wieder unverändert bleibt, insofern es sich blofs u die Genauigkeit der Gewichts-Einheit handelt. Soll abe die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen beurtheil werden, so kommt hier noch die Berechnung der Ausdrück $\frac{m}{\sqrt{p_1}}$; $\frac{m}{\sqrt{p_2}}$ u. s. w. hinzu.

Wollen wir nun zur Schätzung der Genauigkeit de Elemente fortschreiten, so sehen wir leicht, dafs di Schlufsfolgerungen unseres §. 47. bis auf einen Umstan beibehalten werden können. Es müssen nämlich auch hier die allgemein ausgedrückten dE mit den allgemei ausgedrückten dO wieder eben so zusammen hängen wie unsere specialisirten e mit den specialisirten — n. I unserem gegenwärtigen Falle sind aber die Gewichte de Elemente auch auf die Gewichts-Einheit der Beobachtun gen zu beziehen. Wir hätten also nach §. 52. statt der dO und n zu setzen $\sqrt{p} \,.\, dO$ und $\sqrt{p} \,.\, n$. Eben dies haben wi aber bei dem Uebergange auf unsere modificirten Normalglei chungen bereits ausgeführt. Wir haben demnach unser elf tes Geschäft ganz nach der Regel des §. 48. zu verrichten, dann aber nicht zu vergessen, dafs unsere Q und P sich nun auch auf die Gewichts-Einheit der Beobachtungen be ziehen. Dieserhalb gebrauchen wir dann demnächst auch, nur unter demselben Vorbehalte, die Gleichungen n. 38 un verändert.

Das zwölfte Geschäft bleibt natürlich unverändert.

§. 55.

Führen wir unser Rechnungs-Beispiel des §. 53. nun auch in sämmtlichen nachträglichen Geschäften zu Ende, so erhalten wir:

$$v_1 = +0{,}25 \qquad p_1 v_1 v_1 = 0{,}1250$$
$$v_2 = -0{,}35 \qquad p_2 v_2 v_2 = 0{,}3675$$
$$v_3 = +0{,}15 \qquad p_3 v_3 v_3 = 0{,}0900$$
$$[pvv] = 0{,}5825$$

$m = \sqrt{0{,}5825} = \pm 0'',763$, wobei die elffache Repetition also Gewichts-Einheit ist.

Dies gäbe nun weiter $m_1 = \frac{m}{\sqrt{2}} = 0'',54$

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt{3}} = 0'',44$$

$$m_3 = \frac{m}{\sqrt{4}} = 0'',38.$$

Ferner hätten wir die Gewichts-Gleichungen:

$$0 = -1 + 213855\, Q_1 - 67804\, q_2$$
$$0 = 0 - 67804\, Q_1 + 29608\, q_2$$

$$0 = 0 + 213855\, q_1 - 67804\, Q_2$$
$$0 = -1 - 67804\, q_1 + 29608\, Q_2.$$

Daraus $Q_1 = \frac{1}{P_1} = 0{,}00001707$; $Q_2 = \frac{1}{P_2} = 0{,}00012329$

und endlich, eben so wie §. 49,

$\varepsilon_1 = \pm 0{,}00009971$ Toisen $\quad \varepsilon_2 = \pm 0{,}00026799$ Toisen
$= \pm 0{,}0862$ Par. Lin. $\quad = \pm 0{,}2315$ Par. Lin.

Wir bemerken gelegentlich dieses Beispieles nachträglich nun noch einen Umstand, den wir absichtlich bis jetzt mit Stillschweigen übergiengen, obwohl wir schon früher darauf hindeuteten.

Es ist schon §. 53. angeführt, weshalb in diesem speciellen Beispiele durch die Rücksicht auf die verschiedenen Gewichte kein reeller Gewinn für die Sicherheit des Resultates zu hoffen ist. — Wir würden also in der Wirklichkeit uns mit den in §. 44. und 49. gewonnenen End-Werthen recht wohl haben begnügen können, um so mehr, als die

v schon dort so klein ausfielen, dafs wir sie in practischer Hinsicht als 0 betrachten konnten.

Wir können aber eben an diesem Beispiele auch sehen wie wir zu verfahren hätten, wenn ein Fall vorläge (wie er hier nicht vorliegt), bei welchem viel darauf ankäme, die Rechnung so weit zu treiben als möglich. Dann hätten wir nämlich die Wahl der Repetitionszahlen zu Gewichten nur als eine Hypothese oder erste Annäherung zu betrachten, von welcher wir wohl wüfsten, dafs sie nur einstweilen angenommen wäre in Ermangelung besserer Kenntnifs der m_1; m_2; m_3, die wir nach §. 8. eigentlich zuerst kennen müfsten.

Wären wir nun in dieser Hypothese zur Berechnung der m_1; m_2; m_3 gelangt, wie im gegenwärtigen §., so hätten wir untersucht, ob diese m den v wenigstens näherungsweise proportional wären, und gegentheiligen Falls, aus $p_1v_1v_1 = p_2v_2v_2 = p_3v_3v_3$ eine verbesserte Angabe für die p bekommen, die uns in unserem Beispiele mit Beibehaltung von $p_1 = 20$ gegeben hätte: $p_2 = 10$; $p_3 = 56$. Wir hätten also in einer neuen Hypothese die Rechnung mit den neuen p von der Bildung der Normal-Gleichungen aus bis zur Auffindung der m_1 u. s. w. wiederholt und so fortgefahren, bis die letzten Werthe von m mit den vorher bekommenen v wenigstens näherungsweise übereingestimmt hätten, wie solches am Ende des §. 8. angedeutet ist; dann erst wären wir zur Berechnung der Gewichts-Gleichungen u. s. w. fortgeschritten.

Uebrigens finden wir hier beiläufig einen neuen Beleg zu der mehr erwähnten practischen Regel: Da wo wir die Umstände in unserer Gewalt haben, es immer möglichst so einzurichten, dafs die Beobachtungen als gleich genau zu betrachten seyen.

§. 56.

Eine der am häufigsten vorkommenden und nützlichen Anwendungen der Methoden dieses Abschnittes in der practischen Geometrie ist der Horizont-Abschlufs, mit welchem wir uns nun noch, in Gemäfsheit des im §. 44. unter 5) ausgesprochenen Vorsatzes besonders zu beschäftigen haben.

Dieses Geschäft tritt bekanntlich jedesmal dann ein, wenn wir an einem Standpunkte mehr als zwei Hauptvisirpunkte vor uns haben, zwischen ihnen mehr Winkel gemessen haben, als zu ihrer gegenseitigen Festlegung absolut nöthig sind, und nun diese so ausgleichen wollen, dafs alle Widersprüche entfernt werden, welche daraus entstanden, dafs wir die Visirpunkte nicht fehlerfrei so anschneiden konnten, wie wir sie anschneiden wollten.

Es ist freilich schon §. 44. unter 4) gelegentlich bemerkt, dafs die durch Horizont-Abschlufs schon verbesserten Winkel nun doch noch verbesserungsbedürftig bleiben können, weil wir nicht im Stande sind, die Visirpunkte so aufzufassen, wie sie eigentlich aufgefafst werden sollen. Die Existenz solches Bedürfnisses kann uns aber immer nur bekannt werden, wenn wir unseren einzelnen Stations-Punkt verlassen, und andere Punkte zu Hülfe nehmen. Wir haben bei unserem gegenwärtigen Geschäfte also noch gar nicht daran zu denken, und werden erst im nächsten Abschnitte darauf zurückkommen.

Das Verfahren selbst habe ich ohne weitere Entwickelung schon 1831 in den *Beiträgen zur Geographie Kurhessens u. s. w. S.* 15. angegeben. Den erleichternden Kunstgriff, der ganz überaus nützlich, aber nicht wesentlich nothwendig ist, habe ich 1838 *a. a. O. S.* 101. nachgetra-

gen. Endlich enthält meine Abhandlung über die *Pothenot'sche Aufgabe S.* 22. ein weitläufig ausgeführtes Beispiel unter Anwendung des letzterwähnten Kunstgriffes, aber ohne weitere Angabe der Gründe, und blofs in Beziehung auf gleich genaue Beobachtungen. — Wir können also, um die Sache zu erledigen, unter Verweisung namentlich auf letztere Abhandlung, uns hier darauf beschränken, das Verfahren für Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit, nur unter stetem Rückblick auf unsere vorigen §§., an einem Beispiele kurz zu erläutern.

Wir wählen dazu einen Horizont von vier Visirpunkten, wo gerade alle Combinationen derselben, also sechs Winkel gemessen sind, numeriren die Punkte wie immer von links zu rechts, bezeichnen die Winkel mit 2 Ziffern, deren erste den links liegenden Punkt anzeigt, und schreiben ihnen in eckigen Klammern die Repetitionszahlen bei:

$$\begin{aligned}
1.2\,[30]\ \ 48^\circ\,17'\ \ 1'',4 &= o_1\\
1.3\,[20]\ \ 96\ \ 52\ \ 16\,,8 &= o_2\\
1.4\,[26]\ 152\ \ 54\ \ \ 6\,,8 &= o_3\\
2.3\,[25]\ \ 48\ \ 35\ \ 14\,,3 &= o_4\\
2.4\,[28]\ 104\ \ 37\ \ \ 7\,,8 &= o_5\\
3.4\,[44]\ \ 56\ \ \ 1\ \ 48\,,9 &= o_6\,.
\end{aligned}$$

Diese Winkel sollen nun

1) unmittelbar, ohne Kunstgriff, ausgeglichen werden.

Wir sehen, dafs bei r Punkten dazu $r - 1$ Elemente gehören, nämlich die $r - 1$ Azimuthal-Unterschiede zwischen der ersten Richtung und den übrigen; und dafs dann die Beobachtungen durch blofse Abziehung daraus folgen müssen. Demnach hätten wir also nach unserer bisherigen Bezeichnung

$$
\begin{array}{lll}
 & 1.2 = O_1 = +E_1 & \\
 & 1.3 = O_2 = \quad +E_2 & \\
(1) & 1.4 = O_3 = \quad\quad +E_3 & \\
 & 2.3 = O_4 = -E_1 + E_2 & \\
 & 2.4 = O_5 = -E_1 \quad +E_3 & \\
 & 3.4 = O_6 = \quad -E_2 + E_3 . &
\end{array}
$$

Zur Verrichtung des ersten Geschäftes setzt man die orläufigen Azimuthe aus den Beobachtungen an. ewöhnlich ist es dazu hinreichend, bloſs einige der gemessenen Winkel abzuschreiben. Oft kann man aber durch ücksicht auf die gerade vorhandenen Combinationen noch was nachhelfen, wovon in der *Pothenot'schen Aufgabe* n Beispiel vorkommt. Wir setzen in unserem gegenwärgen Beispiele bloſs:

1. [76] A
2. [83] $A + 48^\circ\ 17'\ 1''$
3. [89] $A + 96\ 52\ 17$
4. [98] $A + 152\ 54\ 7$.

ie eingeklammerten Zahlen hinter den Nummern der Punkte edeuten die Anzahl der Anschnitte jedes Visirpunktes. Sie nden sich natürlich durch Addition der früheren Repetionszahlen, neben welchen die entsprechende Nummer sich iederfindet. Die erste Prüfung besteht darin, daſs die umme der eingeklammerten Zahlen jetzt doppelt so groſs yn muſs, als früher bei den gegebenen Winkeln.

Aufstellung besonderer Differentialgleichungen ist hier icht nöthig, weil sie ganz aus den ursprünglichen Gleichunen abzuschreiben wären, wie im ersten Beispiele des §. 44.

Die Rückwärts-Berechnung der Beobachtungen aus en Elementen ist eine bloſse Abziehung; wir erhalten so

in unserem Beispiele, mit Weglassung der Grade und Minuten:

$$O_1 = 1''$$
$$O_2 = 17$$
$$O_3 = 7$$
$$O_4 = 16$$
$$O_5 = 6$$
$$O_6 = 50.$$

Die Coefficienten in den Differential-Gleichungen sind alle entweder $+1$ oder -1 oder 0, und die n finden sich unmittelbar aus Abziehung der Beobachtungen von den eben berechneten O. Demnach sind unsere Bedingungsgleichungen:

für 1.2 [30] $0 = -0'',4 + dE_1$
1.3 [20] $0 = +0,2 + dE_2$
1.4 [26] $0 = +0,2 + dE_3$
2.3 [25] $0 = +1,7 - dE_1 + dE_2$
2.4 [28] $0 = -1,8 - dE_1 + dE_3$
3.4 [44] $0 = +1,1 + dE_2 + dE_3$.

Weil nun die Beobachtungen verschiedene Gewichte haben, die, unter Annahme der einfachen nicht repetirten Beobachtung zur Gewichts-Einheit, durch die Repetitionszahlen ausgedrückt sind, so sollten wir nach §. 52. ursprünglich erst jede dieser Bedingungsgleichungen mit $\sqrt{p}$ multipliciren. Wir haben aber eben daselbst gesehen, dafs wir statt dessen bequemer mit p selbst multipliciren, nachdem erst die sonst zur Bildung der Normalgleichungen nöthigen Multiplicationen vollendet sind. Diese letzten Multiplicationen verwandeln sich nun (ausnahmsweise) in unserem Falle, wo alle Coefficienten in den Bedingungsgleichungen $+1$ oder -1 oder 0 sind, in ein bloſses Beibehalten oder Abändern der Zeichen. Demnach brauchen wir hier bloſs

lie Bedingungsgleichungen selbst mit den p zu multipliciren, nd nach der etwa nöthigen Abänderung des Zeichens zu ad-liren.

Nach diesem Verfahren haben wir also:

$$\begin{aligned}
[pan] &= -0{,}4 \cdot 30 - 1{,}7 \cdot 25 + 1{,}8 \cdot 28 = -4{,}1 \\
[paa] &= +30 + 25 + 28 = +83 \\
[pab] &= \qquad\qquad\qquad\quad = -25 \\
[pac] &= \qquad\qquad\qquad\quad = -28,
\end{aligned}$$

u. s. w.

So erhalten wir die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= -4{,}1 + 83\,dE_1 - 25\,dE_2 - 28\,dE_3 \\
0 &= -1{,}9 - 25\,dE_1 + 89\,dE_2 - 44\,dE_3 \\
0 &= +3{,}2 - 28\,dE_1 - 44\,dE_2 + 98\,dE_3.
\end{aligned}$$

Für die Elimination haben wir uns oben vorbehalten, ede beliebige Methode anzuwenden, die uns gerade am be-uemsten ist. In dem besonderen Falle, den wir hier be-andeln, wo die dE jedenfalls sehr kleine Gröfsen sind und ur ganze Zahlen als Coefficienten vorkommen, ist es aber nmer am bequemsten, indirect zu eliminiren, indem wir rst alle dE bis auf eines $= 0$ setzen, dieses eine aufsuchen nd substituiren u. s. f. — Wir wollen uns hier nicht da-it aufhalten, dieses Verfahren, (welches in der *Pothenot'-chen Aufgabe S.* **24**. schon ausführlich angegeben ist und päterhin doch noch einmal zur Sprache kommen mufs,) wei-r zu entwickeln, sondern nur das Endresultat der Elimina-on angeben, welches ist:

$$e_1 = +0{,}''06; \quad e_2 = +0{,}''04; \quad e_3 = 0{,}''00$$

dem wir die indirecte Elimination abbrechen, wenn wir rgends mehr 0,006 (welches für 0,01 zu rechnen wäre) u substituiren finden.

Die Einführung der e giebt uns dann die definitiven

Elemente. Wir bekommen damit die abgeschlossenen Azimuthe an der Stelle der zuerst angenommenen vorläufigen, und pflegen die letzten Normalgleichungen auch noch beizuschreiben, bei welchen wir die indirecte Elimination abbrachen, (und welche also in unserem Falle nachweisen, dafs nur noch Correctionen unter 0″,01 denkbar sind.)

So hätten wir also in unserem Beispiele:

Abgeschlossene Azimuthe:

1. $[76]\,A$
2. $[83]\,A + 48^\circ\,17'\;\;1'',06 + \mathrm{d}E_1$
3. $[89]\,A + 96\;\;52\;\;17,04 + \mathrm{d}E_2$
4. $[98]\,A + 152\;\;54\;\;\;7,00 + \mathrm{d}E_3$,

Normalgleichungen:

$$0 = -0'',12 + 83\,\mathrm{d}E_1 - 25\,\mathrm{d}E_2 - 28\,\mathrm{d}E_3$$
$$0 = +0,16 - 25\,\mathrm{d}E_1 + 89\,\mathrm{d}E_2 - 44\,\mathrm{d}E_3$$
$$0 = -0,24 - 28\,\mathrm{d}E_1 - 44\,\mathrm{d}E_2 + 98\,\mathrm{d}E_3.$$

Bekanntlich pflegen wir in der Praxis die dE mit den Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes zu bezeichnen, welches dann natürlich ihnen eine andere Bedeutung giebt, als welche wir in diesem Abschnitte ihnen beilegten.

Nachträglich berechnen wir dann die Verbesserungen v durch Substitution der e in die Bedingungsgleichungen oder durch unmittelbare Subtraction der abgeschlossenen Azimuthe und neue Vergleichung mit den Beobachtungen. Diese v pflegen wir dann *corr. H* zu benennen, um die hier für den einzelnen Stations-Punkt gefundenen Verbesserungen von den anderen zu unterscheiden, die etwa wegen Verkennung der wahren Visirpunkte noch nöthig seyn könnten, und die sich erst aus Messungen auf anderen Stationen ergeben müssen.

In unserem Beispiele hätten wir

corr. H

$$v_1 = -0'',34$$
$$v_2 = +0,24$$
$$v_3 = +0,20$$
$$v_4 = +1,68$$
$$v_5 = -1,86$$
$$v_6 = +1,06.$$

Die Prüfung liegt dann darin, daſs die Wiederholung der Rechnung mit den verbesserten Winkeln $o + v$ die vorher letzten Normal-Gleichungen unmittelbar geben muſs.

2) Der überaus nützliche Kunstgriff, welcher oben noch nicht gebraucht wurde, und welcher, wie weiter erhellen wird, auf den Fall beschränkt ist, daſs man beim siebenten Geschäft indirect eliminiren will, besteht nun darin, daſs man ein der Aufgabe an sich fremdes Element mit einführt. — Man betrachtet nämlich nicht mehr wie bisher die Azimuthal-Unterschiede vom ersten Punkte aus, sondern statt ihrer die Azimuthe selbst, die man wie oben von einem unbestimmten Anfangspunkte aus zählt, als Elemente.

Um die Ordnungszahlen wie oben beibehalten zu können, wollen wir das erste Element, was wir auf diese Weise erhalten, mit E_0 bezeichnen, und wäre also jetzt in der vorläufigen Annahme

für 1. [76] $E_0 = A$
2. [83] $E_1 = A + 48^\circ 17' 1''$
3. [89] $E_2 = A + 96\ 52\ 17$
4. [98] $E_3 = A + 152\ 54\ 7$,

und also

$$1.2 = O_1 = -E_0 + E_1$$
$$1.3 = O_2 = -E_0 + E_2$$
1) $$1.4 = O_3 = -E_0 + E_3$$
$$2.3 = O_4 = -E_1 + E_2$$
$$2.4 = O_5 = -E_1 + E_3$$
$$3.4 = O_6 = -E_2 + E_3.$$

Nun bleibt alles unverändert, und sind also die Bedingungsgleichungen:

für 1 . 2 [30] $0 = -0'',4 - dE_0 + dE_1$
1 . 3 [20] $0 = +0,2 - dE_0 + dE_2$
1 . 4 [26] $0 = +0,2 - dE_0 + dE_3$
2 . 3 [25] $0 = +1,7 - dE_1 + dE_2$
2 . 4 [28] $0 = -1,8 - dE_1 + dE_3$
3 . 4 [44] $0 = +1,1 - dE_2 + dE_3$.

Bilden wir nun daraus ganz wie oben die Normalgleichungen, so erhalten wir:

$0 = +2,8 + 76\,dE_0 - 30\,dE_1 - 20\,dE_2 - 26\,dE_3$
$0 = -4,1 - 30\,dE_0 + 83\,dE_1 - 25\,dE_2 - 28\,dE_3$
$0 = -1,9 - 20\,dE_0 - 25\,dE_1 + 89\,dE_2 - 44\,dE_3$
$0 = +3,2 - 26\,dE_0 - 28\,dE_1 - 44\,dE_2 + 98\,dE_3$.

Die Einführung des ursprünglich fremden Elementes E_0 hat also zunächst die Folge, dafs eine Normalgleichung mehr entsteht als oben; sodann aber auch, dafs nunmehr die Normalgleichungen addirt die identische Gleichung $0 = 0$ geben, indem die Summen der einzelnen Glieder $= 0$ sind.

Dieser letzte Umstand ist nothwendig dadurch herbeigebracht, dafs die Gröfse A mit als Element eingeführt ist ohne dafs unter unseren o irgend eines wäre, welches dazu dienen könnte, das A in Zahlen zu bestimmen. Wir würden also, welche Combination von vier Gleichungen aus unseren (1) wir auch auswählen möchten, bei der Elimination nothwendig auf eine Gleichung kommen müssen, welche die Auffindung der auf diese Weise aufgefafsten Elemente als unmöglich darstellte. Gerade dasselbe würde sich zeigen, wenn wir aus den jetzigen vier Normalgleichungen direct eliminiren wollten; denn wir können jede von ihnen als aus der Summirung der drei übrigen entstanden betrachten und

haben, wenn wir auch eine weglassen, in den drei übrigen immer ein unbekanntes Glied mehr als wir durch Elimination finden könnten.

Ganz anders gestaltet sich aber die Sache, wenn wir indirect eliminiren, denn dabei haben wir immer alle dE bis auf eins $= 0$ zu setzen, können also jedes einzeln finden; und nun haben wir den überaus grofsen Vortheil, dafs wir vor allen Rechnungsfehlern ganz sicher sind, sobald nur die Bedingungsgleichungen richtig aufgestellt waren; denn die Eigenschaft, dafs die Normalgleichungen, Glied für Glied addirt, überall 0 geben, bleibt offenbar bei jeder beliebigen Substitution für die dE.

Wir wenden also in der Praxis diese letzte Methode bei dem Horizont-Abschlusse regelmäfsig immer an, und mufsten das obige Verfahren, ohne Kunstgriff, nur beibringen, um das gegenwärtige vollständig verständlich zu machen, und durch Vergleichung zu zeigen, wie der Kunstgriff zwar nicht wesentlich nothwendig, aber überaus practisch sey.

Nach dieser Weise giebt uns nun die Elimination:

$e_0 = -0{,}01$; $e_1 = +0{,}05$; $e_2 = +0{,}03$; $e_3 = -0{,}01$.

Daraus erhalten wir dann die

Abgeschlossenen Azimuthe:

1.	[76] A			$-0'',01$	$+ \mathrm{d}E_0$
2.	[83] A	$+$	48° $17'$	$1{,}05$	$+ \mathrm{d}E_1$
3.	[89] A	$+$	96 52	$17{,}03$	$+ \mathrm{d}E_2$
4.	[98] A	$+$	152 54	$6{,}99$	$+ \mathrm{d}E_3$

mit den letzten Normalgleichungen:

$$0 = +0'',20 + 76\,\mathrm{d}E_0 - 30\,\mathrm{d}E_1 - 20\,\mathrm{d}E_2 - 26\,\mathrm{d}E_3$$
$$0 = -0{,}12 - 30\,\mathrm{d}E_0 + 83\,\mathrm{d}E_1 - 25\,\mathrm{d}E_2 - 28\,\mathrm{d}E_3$$
$$0 = +0{,}16 - 20\,\mathrm{d}E_0 - 25\,\mathrm{d}E_1 + 89\,\mathrm{d}E_2 - 44\,\mathrm{d}E_3$$
$$0 = -0{,}24 - 26\,\mathrm{d}E_0 - 28\,\mathrm{d}E_1 - 44\,\mathrm{d}E_2 + 98\,\mathrm{d}E_3.$$

Zuletzt pflegen wir nun noch in der Praxis eine kleine formelle Abänderung dadurch anzubringen, dafs wir das Azimuth des ersten Punktes, welches nach Berichtigung der ersten Richtung hier als $A + e_0$ gefunden ist, nun wieder blofs mit A bezeichnen, d. h. mit anderen Worten, dafs wir das immer unbestimmt bleibende erste Azimuth so ansetzen, wie es der durch den Abschlufs berichtigten ersten Visirlinie entspricht. Wir bewirken dies mit Leichtigkeit dadurch, dafs wir vor dem Aufschreiben der abgeschlossenen Azimuthe bei allen das e_0, was sich in dem unbestimmten Buchstaben A verlieren soll, wieder abziehen. Die Berechtigung dazu erhellt unmittelbar, da wir $A + e_0 = A'$ setzen, und dieses A' auch bei den übrigen Richtungen einführen könnten; oder mit anderen Worten dadurch, dafs jede beliebige Gröfse, die allen Azimuthen hinzugefügt wird, nicht die gegenseitige Lage der Visirlinien ändert, sondern sich auf den dermalen nicht in Betracht kommenden Anfangspunkt der Azimuthe wirft.

Dadurch erhalten wir die abgeschlossenen Azimuthe wieder ganz genau in denselben Ausdrücken, die wir ohne Anwendung des Kunstgriffes bekommen hätten. Nur durch das stehen bleibende dE_0 so wie durch die dE_0 in den letzten Normalgleichungen bleibt uns ein Erinnerungszeichen, dafs wir die erste Visirlinie, eben so wie die übrigen, nach den vorhandenen Beobachtungen schon auf die Verbesserungen, die wir an dieser einen Station finden konnten, ausgeglichen haben. Wenn wir nun späterhin aus anderen Gründen noch anderweite Verbesserungen an die Visirlinien anbringen, so werden wir dann um so weniger vergessen, dafs unsere dermalen erste, gerade eben so zu behandeln ist, wie die übrigen.

Die Berechnung der *corr. H* und die endliche Prüfung bleibt dann unverändert dieselbe, wie sie oben unter 1) schon angegeben ist.

§. 57.

Wir haben nun noch einige practische Bemerkungen über den Horizont-Abschluſs beizufügen.

1) Das Urtheil über die Genauigkeit der Winkel-Beobachtungen begründen wir durch Bestimmung des mittleren Fehlers eines einfachen Winkels, indem wir in unserer Gleichung n. 42 die *corr. H* an die Stelle der v schreiben, und für die p unsere Repetitionszahlen setzen. Für z_e haben wir aber jedenfalls, wir mögen nach 1) oder nach 2) gerechnet haben, die Anzahl der wirklich nothwendigen Elemente zu setzen, also $r - 1$, wenn r Richtungen beobachtet sind.

In unserem obigen Zahlen-Beispiele ist also $z_e = 3$ und auch $z_o - z_e = 3$; demnach würde zur Schätzung des mittleren Fehlers m folgendes zu rechnen seyn:

v	$\log vv$	$\log p$	pvv
— 0,34	9,06296	1,47712	3,468
+ 0,24	8,76042	1,30103	1,152
+ 0,20	8,60206	1,41497	1,040
+ 1,68	0,45062	1,39795	70,562
— 1,86	0,53902	1,44716	96,868
+ 1,06	0,05062	1,64345	49,439
			222,529

folglich $m = \sqrt{74{,}1763} = \pm 8'',61$.

2) In dieser Berechnung der m haben wir nun ein gutes practisches Mittel, uns über Umstände zu unterrichten, die auf die Genauigkeit unserer Beobachtungen von Einfluſs seyn können, und die uns sonst wahrscheinlich entgiengen.

Deshalb können wir bei Fragen, wie sie in dem §. 21. auf geworfen worden sind, nicht sicherer zum Ziele kommen als indem wir auf die eben vorgetragene Weise verfahren So z. B. hat mir in dem wirklichen Falle, der dem Beispiel des vorigen §. zum Grunde liegt, dies $m = 8{,}61$, was gegen meine früheren Beobachtungen mit demselben Instrumente verglichen, etwa 2″,5 zu grofs ist, zur Warnung gedient, mich für Haupt-Winkel nie wieder so aufzustellen wie ich es bei diesen Winkeln gewagt hatte.

3) Die Berechnung der *corr. H* kann aber auch allein schon von grofsem Nutzen werden, um auf Fehlerquellen aufmerksam zu machen, die sonst unbekannt blieben. Sie sind mir in meiner Praxis drei Fälle vorgekommen, wo die *corr. H* fast durchgängig negativ ausfielen, das Instrument also die Winkel zu grofs angab. Bei zwei von diesen Fällen (*Beiträge S.* 151. *Pothen. Aufg. S.* 27.) hatte ich blofs fremde Winkel berechnet. Im dritten Falle aber, der mir selbst vorkam, und wo auch das m um 1,″5 gröfser war als sonst zu vermuthen, fand ich bei Untersuchung des Instrumentes eine Schraube etwas lose und eine Nufs ohne Oel. Nachdem ich diese Kleinigkeiten verbessert, und Tags darauf wieder einen Horizont gemessen und abgeschlossen, war alles wieder in seiner gewohnten Ordnung.

4) Man kann offenbar die nach vorigem §. gefundenen mittleren Fehler der gemessenen Winkel auf die Richtungen selbst übertragen, indem man jeden Winkel als die Differenz zweier Richtungen betrachtet. Demgemäfs wäre nach n. 21 der mittlere Fehler einer einmal angeschnittenen Richtung $= \frac{m}{\sqrt{2}}$ und die Anschnittszahl diente als Gewicht, wenn man bei weiterer Benutzung dieser Richtungen ihnen verschiedene Genauigkeit beizulegen die Absicht hätte.

Gienge man nun zu einer folgenden Station über, so itte man dort andere m und $\frac{m}{\sqrt{2}}$ so wie auch andere An-hnittszahlen. Man würde also aus diesen Zahlen immer, ich den öfters mitgetheilten Regeln, die Gewichte sämmtcher Richtungen, die bei einer Triangulirung gebraucht nd, festsetzen können.

Die Vermehrung der Rechnungen, die dadurch bei der ortsetzung der Arbeit entstände, würde aber bei Trianlirungen mit vielen Stations-Punkten sehr bedeutend wern, und doch jedenfalls wenig oder gar nichts nützen. Es mmen nämlich aufser den Repetitions-Zahlen noch manie andere Umstände in Betracht, die in der Praxis auf den igonometrischen Stationen nicht so ausgewählt seyn könn, wie sie eigentlich schon seyn müfsten, um mit voller erechtigung bei den Winkeln der einzelnen Stationen blofs ie Repetitionszahlen zum Grunde zu legen; selbst dann cht, wenn man sich zur Regel macht nur zu beobachten, enn die Umstände günstig sind. Denn auch dabei ist doch ch immer ziemlich viel Spielraum und viel Relatives.

Ich glaube also fortwährend, (vergl. *Beiträge S.* 166.) ıfs man sich, nach gehörig angewandtem Horizont-Abhlusse, mit Berechnung der *corr. H* und der m begnügen, ann aber in Beziehung auf die weitere Bearbeitung den immtlichen Richtungen eines solchen Systemes einerlei Geicht beilegen soll.

5) Bei gröfseren Triangulirungen hat man es auf den tationen gewöhnlich mit Punkten von verschiedener Wichgkeit zu thun, und würde es offenbar zu unnöthigem Zeitufwande führen, wenn man alle Punkte in den Horizontbschlufs aufnehmen wollte. Man verfährt dann am zweckäfsigsten so, dafs man die wichtigen Punkte, welche auf as Haupt-System Einflufs haben, vorerst allein durch Ho-

rizont-Abschlufs bearbeitet, diese abgeschlossenen Az muthe aber sodann in Beziehung auf die Punkte von unte geordneter Wichtigkeit als absolut genau betrachtet. Sin nun letzt gedachte Punkte blofs mit Haupt-Punkten vergl chen, so ist ihr Azimuth auch blofs nach den Regeln d §. 23. zwischen die früher abgeschlossenen Azimuthe ei zuschalten; sind aber dieselben überdies auch noch unt einander verglichen, so macht man die Einschaltung durc einen besonderen Horizont-Abschlufs, bei welchem man d Correctionen der früher abgeschlossenen Haupt-Richtunge $= 0$ setzt. (Beispiele beiderlei Art finden sich reichlic in den *Beiträgen u. s. w.*)

6) Es ist immer rathsam gleich beim Anfange ein Station sich eine vorläufige Uebersicht über alle Punkt zwischen welchen Winkel zu messen sind, anzufertige etwa so, wie wir die General-Protocolle (vergl. *Beiträg S.* 18.) zu machen pflegen, und sich darnach einen Pla für ihre Bearbeitung zu entwerfen. Dadurch allein scho vermeidet ein Practiker, der noch nicht an diese Art Arbei ten gewöhnt ist, jedenfalls den Mifsgriff, der mir bei ne eingetretenen Gehülfen wirklich einmal vorkam, dafs di gemessenen Winkel am Ende getrennte Abschlufs-Gruppe bilden könnten, zwischen welchen die gehörigen Verbin dungsglieder fehlten. Es ist aber auch wiederholt anzura then, besonders bei sehr reichen Horizonten, immer scho im Laufe der Arbeit selbst vorläufige Abschlüsse zu machen wozu jene Uebersicht die erste Anlage bildet. Man erreich dadurch unter anderen den Vortheil, dafs man eine gewiss Gleichförmigkeit in den Anschnittszahlen herstellen kann, welche auf diese Weise doch von Zeit zu Zeit immer zusam mengezählt werden.

Dritter Abschnitt.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Sechstes Kapitel.

Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

§. 58.

Nach unserem §. 10. setzen wir voraus, es seyen die wahren Beobachtungs-Gröfsen O_1; O_2; O_3; O_4 .... durch irgendeinen in der Natur der Sache liegenden Zusammenhang verknüpft, vermöge dessen sich die Kenntnifs einer oder mehrerer von ihnen aus der Kenntnifs der übrigen ergeben müfste. Solche Beobachtungen von Gröfsen O aber, welche sich aus den übrigen O auch berechnen liefsen, werden von uns nun als überschüssig betrachtet werden müssen.

Der Zusammenhang zwischen je einer überschüssigen Beobachtungs-Gröfse und denjenigen anderen, aus welchen sie berechnet werden kann, wird sich im Allgemeinen durch Gleichungen ausdrücken lassen von der Form

$$\begin{aligned} 0 &= F_1(O_1; O_2; O_3; O_4 \ldots.) = \varphi_1 \\ 0 &= F_2(O_1; O_2; O_3; O_4 \ldots.) = \varphi_2 \\ 0 &= F_3(O_1; O_2; O_3; O_4 \ldots.) = \varphi_3 \end{aligned} \qquad (9)$$

u. s. w.

Wir haben diese Gleichungen als die analytischen Ausdrück der Bedingungen zu betrachten, welche für unsere je desmalige Aufgabe statt finden. Ihre Anzahl heifst also nach unserer obigen Festsetzung. Die Anzahl der in ihne vorkommenden O kann aber nach den jedesmaligen Umstän den sehr verschieden seyn, indem in jeder nur eine übe schüssige Beobachtungsgröfse vorkommen mufs.

Unsere wirklichen Beobachtungen o_1; o_2; o_3; o_4 .. weichen nun aber von den wahren O um die unendlich kle nen unvermeidlichen Fehler ab. Demnach haben wir u darauf gefafst zu halten, dafs sich z_b Widersprüche unter ih nen finden werden, die sich numerisch darstellen lasse müssen, wenn wir die Zahlen-Werthe der beobachtete Gröfsen o selbst an die Stelle der O in die Gleichungen (9 substituiren. Wir werden dann statt der 0 auf der linke Seite unserer Gleichungen Gröfsen erhalten, die gleichfal als unendlich klein zu betrachten sind, und mit w_1; w_2; w .... einstweilen bezeichnet werden mögen, und haben als unsere Widersprüche im Allgemeinen durch die z_b Gleichun gen darzustellen

$$(10)\qquad \begin{aligned} w_1 &= F_1(o_1; o_2; o_3; o_4 \ldots) \\ w_2 &= F_2(o_1; o_2; o_3; o_4 \ldots) \\ w_3 &= F_3(o_1; o_2; o_3; o_4 \ldots) \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

wo also die w bestimmte unveränderliche Zahlen-Werth sind, die wir mit aller Schärfe berechnen können und soller

Im Allgemeinen sagen wir, weil es allerdings möglich wäre, dafs eine oder die andere der Gröfsen w sich zufälli $= 0$ fände. Würden alle w aber $= 0$, so hätten wir na türlich nichts mehr auszugleichen, sondern müfsten unser o für die wahren O nehmen, nicht weil wir sie für fehlerfre

elten, was nicht möglich ist, sondern weil sie zufällig le Bedingungen der wahren O erfüllten.

Unsere Aufgabe kommt demnach nun darauf hinaus, s den o erst die w zu finden, und dann solche $o+v$ an e Stelle der O zu setzen, dafs 1) den Bedingungen (9) enau entsprochen wird und 2) $[vv]$ ein Minimum wird.

Denken wir uns also die Gleichungen (9) zuerst diffe-ntiirt, und setzen die partiellen Differential-Quotienten:

$$\begin{array}{lll} \left(\frac{d\varphi_1}{dO_1}\right) = a_1 & \left(\frac{d\varphi_2}{dO_1}\right) = b_1 & \left(\frac{d\varphi_3}{dO_1}\right) = c_1 \\ \left(\frac{d\varphi_1}{dO_2}\right) = a_2 & \left(\frac{d\varphi_2}{dO_2}\right) = b_2 & \left(\frac{d\varphi_3}{dO_2}\right) = c_2 \text{ u. s. w.} \\ \left(\frac{d\varphi_1}{dO_3}\right) = a_3 & \left(\frac{d\varphi_2}{dO_3}\right) = b_3 & \left(\frac{d\varphi_3}{dO_3}\right) = c_3 \\ \left(\frac{d\varphi_1}{dO_4}\right) = a_4 & \left(\frac{d\varphi_2}{dO_4}\right) = b_4 & \left(\frac{d\varphi_3}{dO_4}\right) = c_4 \end{array}$$

u. s. w.

können wir nun diejenigen unendlich kleinen Gröfsen in lgemeinen Gleichungen darstellen, welche statt der Nul-n in den Gleichungen (9) erscheinen würden, wenn wir $_1 + dO_1$ an die Stelle von O_1; $O_2 + dO_2$ an die Stelle von $_2$ u. s. w. substituirten. Wir erhielten so:

$$\begin{array}{ll} & d\varphi_1 = a_1 dO_1 + a_2 dO_2 + a_3 dO_3 + a_4 dO_4 + \ldots. \\ 1) & d\varphi_2 = b_1 dO_1 + b_2 dO_2 + b_3 dO_3 + b_4 dO_4 + \ldots. \\ & d\varphi_3 = c_1 dO_1 + c_2 dO_2 + c_3 dO_3 + c_4 dO_4 + \ldots. \end{array}$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke werden uns freilich nur erst dann auchbar, wenn wir für die a, b, c ... bestimmte Zahlen-erthe setzen. Dies scheint für den ersten Anblick unthun-ch, weil wir die O nicht kennen, welche in die allgemei-n Ausdrücke $\left(\frac{d\varphi_1}{dO_1}\right)$ u. s. w. zu substituiren sind. Wir kön-en uns aber hier eben so helfen, wie wir es in der practi-hen Geometrie in allen ähnlichen Fällen thun, wo solche,

doch immer nur unter den bewufsten Beschränkungen wal re, Differential-Gleichungen zu berechnen sind, d. h. w müssen die gemessenen o an die Stelle der wahren O setze Dies führt uns bekanntlich in der Regel immer ganz z denselben a, b, c, die wir am Ende auch mit den definit ven O hätten finden müssen. Sollte ja einmal ausnahm weise ein Fall eintreten, wo dies nicht geschähe, so wä damit weiter nichts verloren, als dafs wir die Rechnung noc einmal mit verbesserten o zu wiederholen hätten. Solc ein Fall wird aber bei guten Beobachtungen, wie wir sie hi voraussetzen (vergl. §. 5.), nie oder doch nur höchst selte eintreten können.

§. 59.

Nach diesen Vorbereitungen übersehen wir nun scho wie der Gang unserer Arbeit einzuleiten ist. Die w näm lich, welche wir nach (10) müssen finden können, sin nichts weiter als die $d\varphi$ der Gleichungen (11), wenn wir i letzteren Gleichungen überall — v an die Stelle von d setzen. Demnach haben wir nun zuerst z_b Bedingungs gleichungen zu erfüllen:

n. 43.
$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 + \dots \\ 0 &= w_2 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4 + \dots \\ 0 &= w_3 + c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Zahl der Glieder in diesen Bedingungsgleichungen is von den jedesmaligen Bedingungen, also von der besonde ren Beschaffenheit der Gleichungen (9) abhängig. Fehl in einer Bedingungsgleichung ein v, so können wir abe auch seinen Coefficienten $= 0$ geworden denken, und s allen Bedingungsgleichungen z_0 Glieder zuschreiben.

Aber die Erfüllung dieser Bedingungsgleichungen, enn wir auch gleich dazu schon die Mittel hätten, was cht der Fall ist, reichte für unseren Zweck noch keines- eges aus; denn sie bewirkt nur, dafs die $o + v$ mit ein- nder verträglich werden, d. h., dafs die logischen iderspräche wegfallen. Es mufs nun auch $[vv]$ noch ein inimum werden. Dazu haben wir also zunächst die Glei- ung

(12) $$[vv] = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + v_4 v_4 + \ldots.$$

Betrachtung zu nehmen.

Enthielte die rechte Seite dieser Gleichung lauter von nander unabhängige v, so müfsten wir nach §. 6. machen, afs $\left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,v_1}\right) = 0$; $\left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}\,v_2}\right) = 0$ u. s. w. und zwar aus dem runde, weil allgemein ein Maximum oder Minimum nur att finden kann, wenn

$$vv] = \left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}v_1}\right)\mathrm{d}v_1 + \left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}v_2}\right)\mathrm{d}v_2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}v_3}\right)\mathrm{d}v_3 + \left(\frac{\mathrm{d}\,[vv]}{\mathrm{d}v_4}\right)\mathrm{d}v_4 + \ldots$$

= 0 wird, und wir dieses bei beliebigen v und $\mathrm{d}v$ nur durch erreichen können, dafs wir alle Coefficienten = 0 ma- en. Wir erhielten so am Ende $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \ldots. = 0$; so auch $[vv] = 0$; wie es denn auch für sich klar ist, dafs $v] = 0$ seyn müfste, wenn es darauf ankäme, ein absolu- s Minimum dafür zu suchen.

Ein solches absolutes Minimum suchen wir hier aber cht, sondern das Minimum, welches wir finden sollen, ist edingt, und zwar bedingt dadurch, dafs nur solche v lässig sind, welche die Gleichungen n. 43 genau erfül- n. Wir müfsten also, wenn wir buchstäblich nach dem 6. verfahren wollten, erst z_b von unseren v beliebig aus- ihlen, diese vermittelst der Gleichungen n. 43 durch die rigen v ausdrücken, dadurch die Gleichung (12) umge- alten, und dann erst zur Differentiation u. s. w. fortschreiten.

Diese Weitläufigkeit, welche noch dazu das Unange nehme hätte, dafs die Auswahl der z_b unter unseren v, di wir als überschüssig und von den anderen v abhängig be trachten wollten, rein willkührlich bliebe, läfst sich abe vermeiden. Wir erwägen zu dem Ende, dafs $\mathrm{d}[vv]$ auc hier $= 0$ seyn mufs, wenn gleich die v nicht mehr beliebi sind, und somit das obige Mittel, zu $\mathrm{d}[vv] = 0$ zu gelan gen, nicht mehr angewandt werden kann; dafs demnac $[vv]$ einen constanten Zahlen-Werth erhält, der eben da bedingte Minimum vorstellt, während sich die v auf de rechten Seite von (12) so nach einander einrichten müsse dafs den Gleichungen n. 43 vollständig Genüge geschieht.

Demnach werden wir unseren Endzweck erreichen, wen wir n. 43 und (12) differentiiren, letzteres in der Voraus setzung $[vv] = const.$, und sodann die $\mathrm{d}v$ eliminiren.

Dieses giebt uns:

$$
\begin{aligned}
0 &= a_1\mathrm{d}v_1 + a_2\mathrm{d}v_2 + a_3\mathrm{d}v_3 + a_4\mathrm{d}v_4 + \ldots \\
0 &= b_1\mathrm{d}v_1 + b_2\mathrm{d}v_2 + b_3\mathrm{d}v_3 + b_4\mathrm{d}v_4 + \ldots \\
0 &= c_1\mathrm{d}v_1 + c_2\mathrm{d}v_2 + c_3\mathrm{d}v_3 + c_4\mathrm{d}v_4 + \ldots
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

u. s. w.

$$
0 = v_1\mathrm{d}v_1 + v_2\mathrm{d}v_2 + v_3\mathrm{d}v_3 + v_4\mathrm{d}v_4 + \ldots \qquad (14)
$$

wo wir bei der letzten Differentiation wieder den überflüssi gen Factor 2 gestrichen haben.

Die Elimination der $\mathrm{d}v$ gelingt uns, wenn wir z_b Co efficienten κ_1; κ_2; κ_3 .... einstweilen unbestimmt annehmen, die wir Correlaten der Bedingungsgleichungen nennen, mit ihnen die einzelnen Gleichungen (13) der Reihe nach multiplicirt denken, und die κ dann so bestimmen, dafs durch das Addiren sämmtlicher multiplicirter Gleichungen die Gleichung (14) hergestellt wird. Dadurch erhalten wir nämlich, weil die $\mathrm{d}v$ ganz unbestimmt bleiben sol-

n, und also die einzelnen Coefficienten der dv übereinimmen müssen, z_0 **Correlatengleichungen:**

$$\text{n. 44.} \quad \begin{aligned} v_1 &= a_1\kappa_1 + b_1\kappa_2 + c_1\kappa_3 + \dots \\ v_2 &= a_2\kappa_1 + b_2\kappa_2 + c_2\kappa_3 + \dots \\ v_3 &= a_3\kappa_1 + b_3\kappa_2 + c_3\kappa_3 + \dots \\ v_4 &= a_4\kappa_1 + b_4\kappa_2 + c_4\kappa_3 + \dots \end{aligned}$$

is jetzt sind die Correlaten noch bloſs als lineare Functio- n der unbekannten v zu betrachten. Wir haben aber das ittel, ihre Zahlen-Werthe zu finden, ganz in der Nähe. enn substituiren wir die Werthe von v, so wie sie in den orrelatengleichungen ausgedrückt sind, in die Bedingungseichungen n. 43, so entspringen z_b Gleichungen, jede mit Gliedern, aus welchen die v einstweilen verschwunden nd, so daſs die z_b Correlaten daraus gefunden werden kön- n. Diese Gleichungen, die wir hier wieder **Normaleichungen** nennen, sind:

$$\text{n. 45.} \quad \begin{aligned} 0 &= w_1 + [aa]\kappa_1 + [ab]\kappa_2 + [ac]\kappa_3 \\ 0 &= w_2 + [ab]\kappa_1 + [bb]\kappa_2 + [bc]\kappa_3 \text{ u. s. w.} \\ 0 &= w_3 + [ac]\kappa_1 + [bc]\kappa_2 + [cc]\kappa_3 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

ie symmetrische Form der Coefficienten in den Normalgleiungen ist hier, eben so wie oben §. 42, offenbar wieder othwendig und erweist sich auch in der Praxis eben so nützh wie oben.

Aus diesen Normalgleichungen können wir nun endh durch **Elimination** die κ in Zahlen finden, und han dann durch Substitution in die Correlaten-Gleichungen e verlangten v, und somit die ausgeglichenen Beobachngen $o + v$, die wir, bis zu neuen Erfahrungen, für die nehmen, weil sie allen Bedingungen der O genau entprechen.

Was wir oben §. 43. rücksichtlich der Elimination be merkten, gilt auch hier. Wir überlassen also auch hier di Methode derselben einstweilen der jedesmaligen Gewohn heit und Bequemlichkeit ohne specielle Vorschriften.

§. 60.

Wollen wir uns hier also auch erst so wie in §. 43. ein Uebersicht unserer Haupt-Geschäfte machen, so kön nen wir, vorbehaltlich eines gleich weiter zu erörternde Umstandes, folgendes bemerken:

I. vorbereitend
1) Aufsuchung der Bedingungen. Glei chungen (9).
2) Aufsuchung der Differential-Ausdrü cke dafür. Gleichungen (11).

II. sodann
3) Scharfe Berechnung der Widersprü che. Gleichungen (10).
4) Numerischer Ansatz der Bedingungs gleichungen.

III. endlich
5) Aufstellung d. Correlatengleichungen
6) Ausarbeitung der Normalgleichungen
7) Elimination.
8) Berechnung der v durch Substitution in die Correlatengleichungen.

Den vorbehaltenen Umstand nachzutragen, bemerken wir dafs der Fall des gegenwärtigen Abschnittes sich von dem des vorigen besonders dadurch in practischer Hinsicht we sentlich unterscheidet, dafs wir jetzt die Gleichungen (9) von welchen unsere wissenschaftliche Betrachtung ausgieng für jedes gegebene Beispiel erst selbst aufzusuchen haben statt dafs wir dort im §. 41. die Gleichungen (1) wenigstens der Anzahl und Form nach als bekannt und gegeben be trachten konnten.

Der Vortrag der §§. 58. und 59. mufste nun, um erst
en Faden der Untersuchung zu finden, so eingerichtet wer-
en, dafs die practischen Schwierigkeiten, welche sich bei
eser Aufsuchung etwa ergeben könnten, einstweilen mit
illschweigen übergangen wurden. Jetzt aber, wo wir
is ganze Verfahren übersehen, müssen wir sie ernstlich zur
prache bringen.

Zuvörderst nämlich sehen wir leicht ein, dafs wenn ir-
nd eine practische Aufgabe mit überschüssigen Beobach-
ngen vorliegt, erst eine besondere Ueberlegung dazu ge-
irt, um auszumitteln, wie viel Bedingungen zwischen
n Beobachtungen zu finden sind; denn die überschüssigen
eobachtungen sind nicht unmittelbar als solche zu erken-
n. Sodann aber, wenn wir dies ausgemittelt haben,
igt es sich weiter, ob und wie wir die Bedingungen in
leichungen der Form (9) darstellen können. Die
xistenz solcher Gleichungen ist zwar theoretisch noth-
ndig, aber nicht alles, was theoretisch existirt, ist auch
hon practisch darstellbar. Wenn es also auch, wie unser
ittes Geschäft voraussetzt, immer practisch möglich seyn
rd und mufs, z_b Beobachtungen aus den übrigen zu be-
chnen, so wird doch in den meisten wirklichen Fällen die
erechnung nach Methoden geschehen, die noch sehr weit
von entfernt sind, geschlossene Gleichungen von der
rm (9) darzubieten, aus denen sich dann die Differential-
eichungen (11) unmittelbar entwickeln liefsen. In sol-
en Fällen, und sie bilden die Mehrzahl unter den in der
axis vorkommenden, würde es einen ganz unverhältnifs-
ifsigen unpractischen Zeit-Aufwand kosten, wenn wir die
r Vornahme unseres dritten Geschäftes immer nothwendig
rhandenen Berechnungsmittel erst in endliche Gleichun-
n von der Form (9) umsetzen wollten, um sie zu diffe-

rentiiren und dann zu den unentbehrlichen Bedingungsglei
chungen numerisch zu verarbeiten. Wollen wir aber dies
grofse Unbequemlichkeit vermeiden, so müssen wir ander
weite Hülfs-Mittel aufsuchen, um zu den numerischen Be
dingungsgleichungen zu gelangen, und diese lassen sic
denn auch aus Betrachtung des jedesmaligen besonderen Fal
les gewöhnlich mit viel mehr Leichtigkeit finden. Sind abe
die beiden oben unter 3) und 4) aufgeführten Geschäfte (di
sich auch hier oft sehr nützlich mit einander verbinden las
sen) einmal auf irgend eine beliebige Weise ausgeführt, s
geht die übrige Arbeit immer ihren gewiesenen Weg bis zu
Auffindung der v.

Es findet hier also ein ähnliches Verhältnifs statt, wi
bei den elementaren algebraischen Gleichungen, wo wir auch
zwischen Ansatz und Auflösung zu unterscheiden haben. S
wie wir damals zuerst lernten Gleichungen aufzulösen, wel
che schon angesetzt waren, und hernach erst uns übten
selbst anzusetzen; so wollen wir es hier, um das Ausglei
chen bedingter Beobachtungen gründlich zu erlernen, auch
machen. Wir versparen also alle Betrachtungen, die sich
auf den Ansatz der numerischen Bedingungsgleichungen
und überhaupt auf die Vorbereitungen beziehen, auf einen
besonderen Abschnitt, der dem gegenwärtigen nachfolgen
soll. Darin sollen dann die Regeln des Ansatzes für die in
der practischen Geometrie gewöhnlich vorkommenden Fälle
entwickelt und durch Beispiele erläutert werden. Bei den
Ansätzen, die in den Rechnungs-Beispielen des gegenwär-
tigen Abschnittes vorkommen, müssen wir dann freilich
einstweilen voraussetzen, dafs sie richtig seyen, wenn auch
die Gründe, weshalb sie gerade so und nicht anders ge-
macht sind, und weshalb gerade diese und nicht vielleicht

uch andere Bedingungsgleichungen gewählt sind, erst nach em Studium des folgenden Abschnittes einleuchten können ıd werden.

§. 61.

Wir wollen nun gleich noch dasjenige beifügen, was ch auf Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen ezieht. Wir gehen dabei natürlich wieder von unserem $[vv]$ ıs. Dieses $[vv]$ können wir auch hier immer finden, wenn ir die, vermöge des achten der obigen Geschäfte gefunde- en, v quadriren und addiren. Es ist dieses Verfahren frei- ch wieder nicht der einzige mögliche Weg zum Ziele. Wir hlagen ihn aber hier mit einstweiliger Uebergehung eines ıderen, der unter Umständen selbst leichter seyn kann, doch n, weil er sich unmittelbar an unser Voriges anschliefst, ıd wir in der Regel doch in der Praxis die $o + v$ weiter zu auchen, und also die einzelnen v selbst zu kennen ohne- n nöthig haben.

Ist nun aber $[vv]$ berechnet, so gelangen wir sehr leicht ır Bestimmung des mittleren Fehlers m, welcher bei allen eobachtungen hier noch als gleich grofs vorausgesetzt wird. Vir können nämlich nach dem Obigen jede z_b Beobachtun- en als überschüssig aus unseren z_o Beobachtungen auslesen, n sie aus den übrigen $z_o - z_b$ zu berechnen. Hiermit re- ıcirt sich dann aber unser gegenwärtiger Fall ganz auf den all des vorigen Abschnittes. Wir sehen nämlich, dafs wir $- z_b$ fehlerfreie Beobachtungen anstellen, d. h. $z_o - z_b$ ın den beobachteten Gröfsen noch einmal einzeln fehler- ei beobachten müfsten, um aus ihnen als Elementen un- re sämmtlichen O zu finden, und somit die Abweichung er o von der Wahrheit (nicht blofs ihre Befreiung von den Widersprüchen, oder ihre Abweichung von den Bedingun-

gen) zu berechnen. Demnach können wir die Gleichung n. 35 wieder gebrauchen, wenn wir nur $z_o - z_b$ an die Stelle des dortigen z_e schreiben. Wir erhalten so:

$$\text{n. 46.} \qquad m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_b}}$$

und ist folglich unsere dermalige Aufgabe auch in dieser Beziehung gelöst.

Nur die Berechnung der Genauigkeit der Functionen der Beobachtungen macht in diesem Abschnitte etwas mehr Auseinandersetzung nöthig, als im vorigen. Wir wollen sie also hier nicht, wie §. 50, gleich gelegentlich mitnehmen, sondern wieder, wie im ersten Abschnitte geschehen, ein besonderes Kapitel dafür machen.

§. 62.

Wir gehen jetzt, unter dem §. 60. gemachten Vorbehalte, zu Rechnungs-Beispielen über, wollen aber, weil ihrer doch mehrere als bisher nöthig sind, lieber auch mehrere §§. dazu bestimmen.

Gesetzt, es seyen auf einer Station 5 Punkte zu sehen, und wir hätten die fünf Winkel zwischen dem ersten und zweiten, zweiten und dritten u. s. f. mit gleicher Genauigkeit gemessen, ohne uns um ihre Summen oder Differenzen zu bekümmern. So hätten wir erhalten:

$$\begin{aligned} o_1 &= 40^\circ\ 29'\ 17'' \\ o_2 &= 80\ 35\ 26 \\ o_3 &= 96\ 24\ 38 \\ o_4 &= 30\ 7\ 26 \\ o_5 &= 112\ 23\ 48. \end{aligned}$$

Hier haben wir nun die nothwendige Bedingung zu erfüllen, dafs die fünf Winkel zusammenaddirt 360° geben müssen. Sie geben aber 360° + 35″; und ist also das obige

$_{\text{I}} = +35''$. Demnach haben wir die eine Bedingungs-
leichnng:

$$0 = +35'' + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 .$$

araus die fünf Correlatengleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= K_1 \\ v_2 &= K_1 \\ v_3 &= K_1 \\ v_4 &= K_1 \\ v_5 &= K_1 . \end{aligned}$$

ieraus durch Substitution die eine Normalgleichung:

$$0 = 35 + 5K_1 .$$

lso $K_1 = -7$ und demnach $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = -7''$

$$\begin{array}{rrrrr} o_1 + v_1 &= & 40^\circ & 29' & 10'' \\ o_2 + v_2 &= & 80 & 35 & 19 \\ o_3 + v_3 &= & 96 & 24 & 31 \\ o_4 + v_4 &= & 30 & 7 & 19 \\ o_5 + v_5 &= & 112 & 23 & 41 \\ & & \hline 360 & 0 & 0. \end{array}$$

Jnser $[vv]$ wird hier $= 5 \cdot 49 = 245$; also mit $z_b = 1$

$$m = \sqrt{245} = \pm 15'',65.$$

Wir bemerken zum Ueberflusse wiederholt, dafs die aus-
eglichenen Winkel $o+v$ nur deshalb für die wahren Win-
el O genommen werden, weil sie die Bedingung der wah-
en erfüllen, und dabei ein möglichst kleines Fehler-Qua-
rat voraussetzen. Jede andere Vertheilung der jedenfalls
urch den Einflufs von Fehlern entstandenen $35''$ giebt ein
röfseres $[vv]$, wie wir uns auch gleich durch Proben über-
eugen können.

Es wird passend seyn, an dieses Beispiel zwei Be-
nerkungen anzuknüpfen.

a) Wir sehen hier deutlich den Grund der practischen Regel:

> Wenn gleichgenaue Winkel um einen Punkt nicht auf 360° schliefsen, so soll man den Fehler zu gleichen Theilen unter sie vertheilen, ohne sich um ihre Gröfse zu bekümmern.

Es ist kein anderer als der, dafs $[vv]$ dadurch ein Minimum wird, und also die ausgeglichenen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werthe darstellen, die sich statt der wahren nehmen lassen.

b) Bedingungsgleichungen, welche darauf ausgehen, die sämmtlichen Winkel, welche um einen Stationspunkt herum einzeln gemessen sind, auf 360° schliefsen zu machen, nennen wir Bedingungsgleichungen erster Klasse. In einem Triangelsysteme kommen ihrer also so viele vor, als es Punkte giebt, wo solche einzelne Winkel rund herum gemessen sind. Haben aber an Stationspunkten Horizont-Abschlüsse statt gefunden, oder sind die Winkel aus sogenannten Satz-Beobachtungen entnommen, so finden natürlich keine Bedingungsgleichungen erster Klasse mehr statt.

§. 63.

1) Seyen, um mit den Beispielen gleich fortzufahren, in einem ebenen Dreiecke alle drei Winkel gemessen:

$A = o_1 =$	36°	25′	47″
$B = o_2 =$	90	36	28
$C = o_3 =$	52	57	57
	180	0	12.

Hier ist der Widerspruch wegzuschaffen, dafs die drei Win-

l nicht eine Summe von 180° geben. Die Bedingungs-
eichung ist also

$$0 = +12'' + v_1 + v_2 + v_3,$$

raus folgt

Correlatengleichungen:	Normalgleichung:
$v_1 = +K_1$	$0 = +12'' + 3K_1$
$v_2 = +K_1$	
$v_3 = +K_1$.	

wird also $K_1 = -4$; $v_1 = v_2 = v_3 = -4''$

$$[vv] = 48;\ m = \sqrt{48} = \pm 6'',93.$$

Wir sehen an diesem Beispiele den Grund der Regel:

Der Fehler in der Winkelsumme eines einzelnen Dreieckes ist, vorausgesetzt dafs die Winkel gleich genau seyen, zu gleichen Theilen unter die Winkel zu vertheilen.

Hieraus folgt, dafs wir uns unser unmittelbar beobach-
es Linien-System etwa so denken können, wie es **Fig. 1.**,
sehr vergröfsertem Mafsstabe der Fehler, gezeichnet ist,
entweder die links liegenden Gesichts-Linien alle rich-
sind, und die rechts liegenden, unrichtig gesehenen
urch punctirte Linien angedeuteten), dann überall um
iche Winkel-Gröfsen neben den wahren Visirpunkten
ggehen; oder wo, umgekehrt, die rechtsliegenden rich-
sind und die linken gleichviel abweichen; so dafs kleine
eiecke an allen Winkelpunkten durch Ausgleichung weg-
schaffen bleiben. Wir werden gleich sehen, dafs man
h die Sache auch noch auf eine andere Weise versinnli-
en kann.

2) Hängen mehrere Dreiecke jedesmal durch eine Seite
sammen, und sind in ihnen überall gleich genaue Winkel

einzeln gemessen, so kehrt das vorige Beispiel bei jede einzelnen Dreiecke wieder. Wären also z. B. für die Dre ecke **Fig. 2.** gemessen:

$o_1 =$	$36^\circ\,25'\,47''$	$o_4 =$	$50^\circ\,26'\,13''$	$o_7 =$	$70^\circ\,43'\,2$
$o_2 =$	$90\;36\;28$	$o_5 =$	$87\;29\;25$	$o_8 =$	$56\;19\;3$
$o_3 =$	$52\;57\;57$	$o_6 =$	$42\;\;4\;\;7$	$o_9 =$	$52\;56\;3$
	$180\;\;0\;12$		$179\;59\;45$		$179\;59\;3$

so wären drei abgesonderte Bedingungsgleichungen zu e füllen:

$$0 = +12 + v_1 + v_2 + v_3$$
$$0 = -15 + v_4 + v_5 + v_6$$
$$0 = -21 + v_7 + v_8 + v_9.$$

Diese geben, eben so wie oben behandelt, die

Correlatengleichungen:	Normalgleichungen:
$v_1 = K_1$	$0 = +12 + 3K_1$
$v_2 = K_1$	$0 = -15 \quad + 3K_2$
$v_3 = K_1$	$0 = -21 \quad + 3K_3$
$v_4 = K_2$	
$v_5 = K_2$	
$v_6 = K_2$	
$v_7 = K_3$	
$v_8 = K_3$	
$v_9 = K_3$	

und also endlich $v_1 = v_2 = v_3 = -4''$

$$v_4 = v_5 = v_6 = +5''$$
$$v_7 = v_8 = v_9 = +7''$$

$[vv] = 3.16 + 3.25 + 3.49 = 270$; $m = \sqrt{90} = \pm 9'',43$.

Es scheint auf den ersten Blick, dafs wir uns Zeichnungen zu Versinnlichung der fehlerhaften Dreiecke auf ähnliche Weis wie **Fig. 1.** in acht verschiedenen Exemplaren entwerfe

nnten. Versuchen wir es aber, so werden wir finden, ſs es nicht in derselben Weise wie früher ausführbar ist, il den Linien, welche die Dreiecke trennen, Abweichun- n von verschiedener Gröſse und theilweise wenigstens auch n verschiedenen Zeichen beigelegt werden müſsten. Wir rden gleich hierauf zurückkommen.

Wir bemerken zu diesen Beispielen vorerst noch fol- ndes:

Bedingungsgleichungen, welche den Zweck haben, in inkelmessungen diejenigen Widersprüche wegzuschaffen, lche sich durch Vergleichung der gemessenen Winkel mit eoretisch nothwendigen Winkelsummen ergeben, nennen r Bedingungsgleichungen zweiter Klasse. Es für sich klar, daſs wir in den vorigen Beispielen, falls Dreiecke etwa groſs genug gewesen wären, um als sphä- ch oder sphäroidisch betrachtet zu werden, nicht 180° ndern 180° + *dem sphärischen Excesse* zur Entdeckung r Widersprüche hätten gebrauchen müssen. Es ist auch ur, daſs Bedingungsgleichungen zweiter Klasse sich im- r nur da ergeben können, wo in geschlossenen Figuren le Winkel gemessen sind. Wir werden auf letztere Ma- ie im folgenden Abschnitte zurückkommen.

§. 64.

Wenn wir an den Winkelpunkten der Figuren einen rizont-Abschluſs vorgenommen, oder Satz-Beobach- ngen gemacht haben; so bietet sich im Gegensatze gegen n vorigen §. viel natürlicher die Methode dar, nicht die inkel selbst, sondern die einzelnen Richtungen (d. h. Winkel der einzelnen Schenkel mit einer beliebigen An- ngs-Linie, durch deren Abziehung die gemessenen Win- l entstanden gedacht werden können) zu verbessern; in

ähnlicher Weise, wie wir solches §. 56. 2) schon gemacht haben. Selbst wenn nur ein einzelnes Dreieck beobachtet worden ist, läfst sich diese Methode anwenden. — Jeder Winkel bekommt dann eine Verbesserung, welche dadurch entsteht, dafs wir von der Verbesserung seines rechten Schenkels die Verbesserung seines linken Schenkels abziehen.

Wir wollen unsere eben vollendeten beiden Beispiele nun nach dieser veränderten Methode berechnen, vorher aber eine neue Bezeichnung einführen, welche den Zweck hat, für eine beliebige Anzahl von Punkten uns von den beschränkten Alphabete unabhängig und weitere wörtliche Auseinandersetzungen unnöthig zu machen.

Wir belegen zuerst sämmtliche Punkte der betrachteten Figuren mit Ziffern. Also z. B. **Fig. 1.** *A* mit 1, *B* mit 2, *C* mit 3.

Sodann schreiben wir die Winkel mit 3 Ziffern, indem wir die beiden Punkte, zwischen welchen sie gemessen sind, mit ihren beiden durch einen Punkt getrennten Ziffern bezeichnen, und zwar in der Ordnung, wie sie dem Beobachter von Links zu Rechts erscheinen, alsdann aber die Ziffer des Scheitelpunktes, wo der Winkel beobachtet ist, darunter setzen. (Das erste haben wir schon im §. 56. gethan. Es war aber dort noch nicht nöthig, den Scheitelpunkt darunter zu bemerken, indem dieser dort bei allen Winkeln einer und derselbe war.) Unser Dreieck **Fig. 1.** hat demnach die drei Winkel $^{2}_{1}{}^{3} = A$, $^{3}_{2}{}^{1} = B$, $^{1}_{3}{}^{2} = C$.

Ferner bezeichnen wir die Richtungen der einzelnen Schenkel, d. h. also die Winkel mit der willkührlichen, links von allen gedachten Anfangslinie, mit zwei übereinander gesetzten Ziffern, dergestalt, dafs wir die Ziffer des Scheitelpunktes, auf welchem wir uns stehend denken, unten hin setzen. Demnach ist also in **Fig. 1.**

$${}^{2}_{1}{}^{3} = -\tfrac{2}{1} + \tfrac{3}{1};\ {}^{3}_{2}{}^{1} = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2};\ {}^{1}_{3}{}^{2} = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}.$$

eiter schreiben wir, wenn wir die Länge einer Linie aus-
ücken wollen, die Ziffern der Endpunkte, durch einen
nkt getrennt, neben einander und setzen zur deutlichen
nterscheidung von solchen Fällen, wo wir etwa, wie §. 56,
e Bezeichnung der Scheitelpunkte von Winkeln weggelas-
n hätten, noch überdies unter jede Ziffer einen Punkt.
emnach wären die Dreiecksseiten der **Fig. 1.**

$$\dot{1}\,\dot{2} = AB;\ \dot{2}\,\dot{3} = BC;\ \dot{3}\,\dot{1} = CA.$$

ndlich beschliefsen wir, sämmtliche durch die Ausglei-
ung auszumittelnden Verbesserungen mit denselben Ziffern
bezeichnen, womit die zu verbessernden Gröfsen selbst
zeichnet sind, nur dafs wir sie jetzt in Parenthesen ein-
hliefsen. — Es hätte demnach, wenn in unserer **Fig. 1.**
les gemessen wäre, was sich messen läfst, das definitive
reieck die

rbess. Winkel: ${}^{2}_{1}{}^{3} - (\tfrac{2}{1}) + (\tfrac{3}{1});\ {}^{3}_{2}{}^{1} - (\tfrac{3}{2}) + (\tfrac{1}{2});\ {}^{1}_{3}{}^{2} - (\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{3})$

rbess. Seiten: $\dot{1}\,\dot{2} + (\dot{1}\,\dot{2});\ \dot{2}\,\dot{3} + (\dot{2}\,\dot{3});\ \dot{3}\,\dot{1} + (\dot{3}\,\dot{1})$.

Man könnte noch wohl eine Unterscheidung zwischen
n gemessenen und verbesserten Gröfsen einführen, indem
an z. B. entweder bei den ersten ein *g* oder bei den letzten
n *c* an die Stelle des Punktes schriebe. Es scheint aber
ese Vermehrung der Zeichen nicht nöthig, da eine Ver-
echselung nicht leicht möglich ist, zumal man in der Pra-
s doch mit Worten über die Columnen zu schreiben pflegt,
gemessene oder verbesserte Gröfsen damit gemeint sind.

Nach Einführung dieser Bezeichnung bekommen wir
n für unsere Beispiele des vorigen §.

1) die Bedingungsgleichungen 2. Klasse:

$$0 = +12 - (\tfrac{2}{1}) + (\tfrac{3}{1}) - (\tfrac{3}{2}) + (\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{3})$$

raus die

Correlatengleichungen: Normalgleichung:

$$\begin{aligned}
\binom{2}{1} &= -K_1 \\
\binom{3}{1} &= +K_1 \\
\binom{3}{2} &= -K_1 \qquad 0 = +12 + 6K_1. \\
\binom{1}{2} &= +K_1 \\
\binom{1}{3} &= -K_1 \\
\binom{2}{3} &= +K_1
\end{aligned}$$

Also $K_1 = -2$; $\binom{2}{1} = \binom{3}{2} = \binom{1}{3} = +2$

$\binom{3}{1} = \binom{1}{2} = \binom{2}{3} = -2$.

Die ausgeglichenen Winkel werden also genau dieselben wi
oben, nämlich:

$$\begin{aligned}
o_1 + v_1 &= 36^\circ\,25'\,43'' \\
o_2 + v_2 &= 90\;36\;24 \\
o_3 + v_3 &= 52\;57\;53 \\
&\overline{180\;\;0\;\;0}
\end{aligned}$$

Wollen wir die Genauigkeit unserer Messung bestimmen, s
müssen wir hier, wo wir Richtungsverbesserungen zun
Grunde legten, auch zunächst den mittleren Fehler eine
Richtung suchen. Wir haben also $[vv] = 6.4$ und als
$m = \sqrt{24} = \pm 4,''90$ zu setzen. Dies stimmt auch gan
genau mit unserer vorigen Rechnung; denn die m für Win
kel und Richtungen stehen im Verhältnisse $\sqrt{2} : 1$, wie sol
ches nach n. 18 sich auch gehört.

Zur Veranschaulichung uns wendend, sehen wir aber
dafs wir im Obigen nicht wohl daran thaten, immer einen
Schenkel der zu verbessernden Winkel als unverbesserlich
zu betrachten. Wir müssen vielmehr bei jedem einzelnen
Schenkel einen Fehler voraussetzen, dergestalt, dafs bei
einem positiven w_1, wie in unserem Rechnungsbeispiele, die
linken Schenkel immer den Visirpunkt, den wir eigentlich
hätten anschneiden sollen, irriger Weise rechts gelassen, die

chten Schenkel aber ihre Visirpunkte links gelassen hät-
n. So erhalten wir nun **Fig. 3.** nur eine Zeichnung.
e Dreiecke, welche sich aus je zwei fehlerhaft gesehenen
chtungen neben der zugehörigen durch Ausgleichung be-
htigten zusammensetzen, werden hier alle gleichschenk-
; und einander ähnlich, liegen auch alle auswärts, weil
positiv war. Bei einem negativen w_1 würden sie alle in-
ndig gelegen haben. Neben den Punkten lassen sich
nn jedesmal andere Punkte finden, in welchen die fehler-
ften Visirlinien sich schneiden.

2) Wir wollen nun unser obiges zweites Beispiel wie-
r vornehmen, welches sich auf **Fig. 2.** bezieht, wo wir
hon vorläufig die Punkte zu diesem Zwecke mit Ziffern
zeichnet haben.

Hier hätten wir also die drei Bedingungsgleichungen:

$$0 = +12 - (^2_1) + (^3_1) - (^3_2) + (^1_2) - (^1_3) + (^2_3)$$
$$0 = -15 - (^4_3) + (^1_3) - (^1_4) + (^3_4) - (^3_1) + (^4_1)$$
$$0 = -21 - (^5_4) + (^1_4) - (^1_5) + (^4_5) - (^4_1) + (^5_1).$$

raus bekommen wir die 14 Correlatengleichungen, wel-
e wir gleich nach den Ziffern ordnen wollen:

$$(^2_1) = -K_1 \qquad (^2_3) = +K_1$$
$$(^3_1) = +K_1 - K_2 \qquad (^4_3) = -K_2$$
$$(^4_1) = +K_2 - K_3 \qquad (^1_4) = -K_2 + K_3$$
$$(^5_1) = +K_3 \qquad (^3_4) = +K_2$$
$$(^1_2) = +K_1 \qquad (^5_4) = -K_3$$
$$(^3_2) = -K_1 \qquad (^1_5) = -K_3$$
$$(^1_3) = -K_1 + K_2 \qquad (^4_5) = +K_3.$$

rch Substitution in die Bedingungsgleichungen erhalten
r nun die Normalgleichungen:

$$0 = +12 + 6K_1 - 2K_2$$
$$0 = -15 - 2K_1 + 6K_2 - 2K_3$$
$$0 = -21 - 2K_2 + 6K_3.$$

Diese Normalgleichungen sind also, eben so wie die Bedi
gungsgleichungen, nicht mehr abgesondert wie im vorigen
Dies hat seinen Grund darin, dafs wir dort stillschweige
vorausgesetzt hatten, die zweien benachbarten Dreiecken g
meinschaftlichen Visirlinien hätten auf zwei verschiede
Weisen den Visirpunkt verfehlen können, je nachdem sie de
einen oder dem anderen Dreiecke angehörten. Offenb
würde diese Voraussetzung kaum statthaft seyn, wenn w
die Winkel einzeln, vielleicht gar zu verschiedenen Zeit
ohne Repetition gemessen hätten. Hier aber, wo wir n
einen solchen Fehler bei jeder Visirlinie zulässig halte
wo wir also voraussetzen, dafs die Fehler, die bei den Ei
stellungen auf die Visirpunkte begangen wurden, auf irge
eine Weise schon ausgeglichen sind, und nur noch der Fe
ler im Erkennen des richtigen Visirpunktes bleibt (verg
§. 44. 4)), müssen die Berichtigungen benachbarter Dre
ecke von einander abhängen, damit ihre Widersprüche ve
schwinden.

Die Elimination giebt: $\kappa_1 = -0{,}71$; $\kappa_2 = +3{,}8$
$\kappa_3 = +4{,}79$. Daraus folgt dann weiter durch Substituti
in die Correlatengleichungen:

$$\begin{array}{ll} (^2_1) = +0'',71 & (^2_3) = -0'',71 \\ (^3_1) = -4{,}57 & (^4_3) = -3{,}86 \\ (^4_1) = -0{,}93 & (^1_4) = +0{,}93 \\ (^5_1) = +4{,}79 & (^3_4) = +3{,}86 \\ (^1_2) = -0{,}71 & (^5_4) = -4{,}79 \\ (^3_2) = +0{,}71 & (^1_5) = -4{,}79 \\ (^1_3) = +4{,}57 & (^4_5) = +4{,}79. \end{array}$$

Demnach haben wir nun durch Zusammensetzung, noch ei
mal weitläufig alles aufgeschrieben:

$v_1 = -(^2_1)+(^3_1) = -5'',28$ $v_4 = -(^4_3)+(^1_3) = +8'',43$ $v_7 = -(^5_4)+(^1_4) = +5'',7$
$v_2 = -(^3_2)+(^1_2) = -1{,}42$ $v_5 = -(^1_4)+(^3_4) = +2{,}93$ $v_8 = -(^1_5)+(^4_5) = +9{,}$
$v_3 = -(^1_3)+(^2_3) = -5{,}28$ $v_6 = -(^3_1)+(^4_1) = +3{,}64$ $v_9 = -(^4_1)+(^5_1) = +5{,}7$

nd daraus unsere Dreiecke mit ihren Verbesserungen in der
'orm, die wir dafür in der practischen Geometrie gewählt
aben:

Dreiecke.	Punkte.	Gemessen.	corr. Δ.	Verbessert.
(I)	1.	36° 25′ 47″	− 5″,28	41″,72
	2.	90 36 28	− 1 ,42	26 ,58
	3.	52 57 57	− 5 ,28	51 ,72
				0 ,02
(II)	3.	50 26 13	+ 8 ,43	21 ,43
	4.	87 29 25	+ 2 ,93	27 ,93
	1.	42 4 7	+ 3 ,64	10 ,64
				0 ,00
(III)	4.	70 43 28	+ 5 ,72	33 ,72
	5.	56 19 37	+ 9 ,58	46 ,58
	1.	52 56 34	+ 5 ,72	39 ,72
				0 ,02.

s braucht wohl nicht erinnert zu werden, dafs in der letzten
olumne der kleine Ueberschufs 0,02 nur von weggerunde-
n höheren Decimalen herrührt, und dafs sich hier der sphä-
sche Excefs wieder finden mufs, wenn vom Anfange an
arauf Rücksicht genommen ist.

Das $[vv]$ für die Richtungen wird hier $= 167{,}096$ und
lso ist

$$m = \sqrt{\frac{167{,}096}{3}} = \sqrt{55{,}6987} = \pm 7'',46.$$

er mittlere Fehler eines Winkels würde also $m\sqrt{2} = \pm 10'',55$;
ıd sehen wir hieraus, dafs wir §. 63. diesen Fehler zu klein
:hätzten, als wir einer und derselben Gesichtslinie je nach
erschiedenheit des Dreieckes, in welchem sie vorkam, zwei
erschiedene Verbesserungen zuschrieben.

Zur Veranschaulichung können wir uns nun auch eine

Zeichnung entwerfen, wie **Fig. 4.**, wo die irrig beobachteten Visirlinien wieder punktirt, die berichtigten schwarz ausgezogen sind. Die Dreiecke zwischen je einer berichtigten und den beiden entsprechenden fehlerhaften werden hier noch gleichschenklig, aber nicht mehr, wie im vorigen Beispiele, auch ähnlich. Neben den Punkten findet sich bei 2 und 5 wieder ein Durchschnittspunkt der hierher gehenden fehlerhaften Visirlinien; neben 3 und 4 finden sich drei solcher Durchschnittspunkte; neben 1 finden sich deren sechs; und sehen wir im Allgemeinen ein, dafs in jedem Punkte, worin n Richtungen zusammentreffen, sich $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ solcher Durchschnitte finden müssen.

§. 65.

Wir wollen nun hier erst noch ein Paar Bemerkungen anknüpfen, welche uns für die Folge nützlich seyn können.

1) Die Ausgleichung der Winkel-Beobachtungen vermittelst Verbesserung der einzelnen Richtungen ist, sobald mehr als zwei Richtungen vorliegen, immer zu empfehlen, denn sie beruht, wie schon §. 44. und 56. erwähnt ist, und hier auf's Neue einleuchtet, gerade darauf, dafs der Beobachter immer einen und denselben Punkt hat anschneiden wollen, welches auch der Winkel gewesen seyn mag, in welchem er vorkam. — Wir werden also in Zukunft auch unsere Beispiele vorzugsweise darauf einrichten. Die nächste Folge davon ist, wie wir uns eben überzeugt haben, dafs die Fehler der Winkelsummen bei aneinanderhängenden Dreiecken, nicht zu gleichen Theilen unter die Winkel vertheilt werden dürfen. Es kann sogar der Fall vorkommen, dafs die Verbesserungen von verschiedenen Zeichen sind; was man sich auch durch Betrachtung unserer **Fig. 4.**,

welcher dieser Fall freilich noch nicht vorkommt, veran-
haulichen kann.

2) Wir haben bei diesen Beispielen, bis jetzt blofs als
hatsache, beiläufig gefunden, dafs die Verbesserungen
iner Richtung, in welcher vorwärts und rückwärts visirt
orden, immer der Gröfse nach gleich, dem Zeichen nach
ber verschieden wurden; woraus dann folgte, dafs die klei-
en Dreiecke zwischen je einer verbesserten Richtung und
en entsprechenden beiden unverbesserten, gleichschenke-
g wurden, im ersten Beispiele sogar auch ähnlich. Es
eigt sich nun aber, dafs dieses nicht etwa zufällig war, son-
ern nothwendig aus der Natur der Aufgabe folgte. Wir sehen
ies am besten an unseren Bedingungs- und Correlatengglei-
hungen. Wenn hier nämlich z. B. $\binom{2}{1}$ in der ersten Bedin-
ungsgleichung des zweiten Beispieles mit dem Minuszeichen
rschien (also in der ersten Correlatengleichung $\binom{2}{1} = -\kappa_1$
esetzt werden mufste), so hatte dies seinen geometrischen
rund darin, dafs $\frac{2}{1}$ der linke Schenkel eines Winkels war, dem
och ein rechter Schenkel angehören mufste. Die Rich-
ng $\frac{1}{2}$ mufste also am Ende ein rechter Schenkel werden,
enn ein Dreieck geschlossen werden sollte. Demnach
ufste $\binom{1}{2}$ in der ersten Bedingungsgleichung mit dem
luszeichen auftreten und die fünfte Correlatengleichung
lso $\binom{1}{2} = +\kappa_1$ seyn. — Ganz dieselbe Bewandnifs hat
s mit den Richtungen, die mehreren Dreiecken gemein-
chaftlich sind, z. B. $\frac{3}{1}$ und $\frac{1}{3}$; nur kommen hierbei auch meh-
ere Bedingungsgleichungen und also auch mehrere Corre-
ten in Betracht.

Hätten bei der zweiten Aufgabe dieselben Dreiecke vor-
elegen, ihre Verbindung wäre aber die in **Fig. 5.** ange-
eutete gewesen, so würden nur in der dritten Bedingungs-
leichung die Verbesserungen durchweg andere Zeichen er-

halten haben; die eben bemerkte Eigenschaft aber wäre geblieben. — Wir überlassen es dem Leser, dieses Beispiel zur Uebung selbst zu entwickeln.

3) Noch einen nahe mit dem Vorigen zusammenhängenden Umstand hätten wir, zunächst als Thatsache, an unserem zweiten Beispiele bemerken können. Addiren wir nämlich überall die Richtungs-Correctionen, die sich auf einen und denselben Standpunkt beziehen, so erhalten wir überall die Summe 0. —

Diese Thatsache erklärt sich zunächst aus den Correlaten-Gleichungen, wo wir also z. B. **Fig. 4.** hatten

$$\begin{aligned}
(^2_1) &= -K_1 \\
(^3_1) &= +K_1 - K_2 \\
(^4_1) &= \quad +K_2 - K_3 \\
(^5_1) &= \quad\quad +K_3 .
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von **Fig. 5.** würde sie sich auf gleiche Weise erklären. Der geometrische Grund dieser Thatsache ist auch hier wieder, dafs jeder Richtung, insofern sie eine linke ist, in demselben Dreiecke eine rechte entsprechen mufs, und dafs die entgegengesetzte eine rechte ist. Die weitere Ausführung überlassen wir dem Leser.

Dieses Umstandes können wir uns aber nützlich bedienen, um unsere Richtungs-Verbesserungen zu prüfen, ehe wir aus ihnen die Winkel-Verbesserungen zusammensetzen.

4) Die Veranschaulichung der v, welche wir in den letzten Beispielen nach **Fig. 3.** und **Fig. 4.** bewirkten, hat schon immer ihr Angenehmes. Es können aber mitunter auch solche Abbildungen der den Richtungen beizufügenden *corr.* Δ von reellem practischen Nutzen seyn. Wenn sie aber letzteren vollständig leisten sollen, so ist es zweckmäfsig eine andere Methode dabei einzuschlagen, welche

ine Zeichnung in den richtigen Verhältnissen leicht gestat-
et. Wir wollen dieselbe bei dieser Gelegenheit auch noch
itnehmen.

Zu dem Ende berechnet man die Perpendikel, welche
on einem durch die Ausgleichung festgestellten Visirpunkte
uf die verbesserungsbedürftigen Visirlinien gefällt werden
önnen, und zwar, weil die *corr.* Δ immer überaus kleine
Vinkel sind, nach der Formel $V = \frac{D \,.\, corr.\, \Delta}{\varrho}$, wo D die
ntfernung des jedesmaligen Standpunktes bedeutet. Dann
tellt man unter den gehörigen Winkeln die berichtigten Vi-
irlinien zusammen, welche sich in dem betreffenden Punkte
chneiden; errichtet auf jeder ein Perpendikel von der
änge V, und zwar, von dem entfernten Standpunkte aus
esehen, nach der linken Seite, wenn die *corr.* Δ positiv
ar, nach der rechten, wenn sie negativ war. Endlich
ieht man dann die fehlerhaften Visirlinien (punktirt) den be-
ichtigten parallel. Auf diese Weise habe ich in **Fig. 6.**,
1 $\frac{1}{30}$ der wahren Gröfse, meine Anschnitte des Steinposta-
ientes auf dem Knill (nach *Beiträge* §. 94.) dargestellt,
nter denen gerade, wahrscheinlich durch Lateral-Refrac-
ion, die gröfste *corr.* Δ vorkommt, die mir überhaupt je
n der Praxis bei Haupt-Richtungen vorgekommen ist. —
Man könnte sich nöthigenfalls die Sache auf diese Weise in
atürlicher Gröfse mit Kreide auf den Fufsboden zeichnen.

5) Nun können wir gelegentlich denn auch noch die
n §. 44. 4) angeführte (*Pothenot'sche Aufgabe* §. 14. bei
Beurtheilung der Coordinaten gebrauchte) Methode vollends
rklären. Es waren dort zwischen fünf Richtungen vier
Vinkel gemessen, welche der Reihe nach der Verbesserun-
en: $-11,''98$; $+10,''53$; $-7,''31$; $+4,''70$ bedurften,
wenn die Coordinaten-Zahlen mit absoluter Genauigkeit

die Punkte darstellten, die wir sehen sollten. Wir mufsten uns also an jede beobachtete Richtung eine Verbesserung angebracht denken und hatten also, ganz so wie in den Beispielen des vorigen §., vier Bedingungsgleichungen für unsere fünf *corr.* Δ, die dann durch die Correlaten u. s. w. gefunden wurden. — Die Zeichen der *corr.* Δ gaben dann Auskunft, ob die Punkte, die den Coordinaten-Zahlen entsprachen, rechts oder links von den beobachteten Visirlinien lagen. Die Gröfsen V endlich gaben die Halbmesser der Kreise, welche um die Coordinaten-Punkte beschrieben, von den Richtungs-Linien zu den gesehenen Punkten berührt werden mufsten.

§. 66.

Wir haben in den vorigen Beispielen bloſs Bedingungsgleichungen zweiter Klasse gehabt, bei welchen sich die Gründe des Ansatzes leicht übersehen lieſsen. Nun giebt es aber noch Bedingungsgleichungen dritter Klasse, welche diejenigen Widersprüche wegschaffen sollen, die zwischen den Linien-Verhältnissen entstehen, wenn zu deren Berechnung verschiedene verbesserungsbedürftige Beobachtungen zum Grunde gelegt werden. — Wir wollen nun hier zuerst einige Beispiele vornehmen, in welchen bloſs Bedingungsgleichungen dritter Klasse vorkommen.

1) Sey also **Fig. 7.** (um bei dem Beispiele *Pothenotsche Aufgabe S.* 9. anzufangen,) ein ebenes Dreieck zwischen den Punkten 1; 2; 3 gegeben und für die folgende Anwendung als absolut genau zu betrachten. — Seine Winkel seyen:

$$\begin{aligned} {}^{2}_{1}{}^{3} &= 60^\circ\ 39'\ 32'' \\ {}^{3}_{2}{}^{1} &= 81\ \ 9\ \ 0 \\ {}^{1}_{3}{}^{2} &= 38\ 11\ 28 \end{aligned}$$

Nun seyen zur Bestimmung des Punktes 4 die Winkel emessen:

$$^{1}_{4}{}^{2} = 55^\circ\,38'\,2'' \text{ und } ^{2}_{4}{}^{3} = 112^\circ\,32'\,52''.$$

Ueberdies aber sey nun noch im Punkte 3 ein Versicherungsschnitt $\frac{4}{3}$ hinzugekommen, welcher den Winkel

$$^{4}_{3}{}^{2} = 45^\circ\,54'\,4''$$

egeben haben mag.

Bei der Ausgleichung kommt es hier auf Ausmittelung er vier Richtungs-Verbesserungen $(\frac{1}{4})$, $(\frac{2}{4})$, $(\frac{3}{4})$ und $(\frac{4}{3})$ n, da wir die Winkel des gegebenen Dreieckes als absolut genau betrachten wollen. Gehen wir von der Gleichung

$$\frac{\dot{2}.\dot{1}}{\dot{2}.\dot{4}} \cdot \frac{\dot{2}.\dot{4}}{\dot{2}.\dot{3}} \cdot \frac{\dot{2}.\dot{3}}{\dot{2}.\dot{1}} = 1$$

us, so können wir dafür, mit Vorbehalt der noch anzuringenden Berichtigungen, zuerst setzen:

$$\textit{sin}\ ^{1}_{4}{}^{2}.\ \textit{sin}\ ^{4}_{3}{}^{2}.\ \textit{sin}\ ^{2}_{1}{}^{3}.\ =\ \textit{sin}\ ^{2}_{1}{}^{4}\ \textit{sin}\ ^{2}_{4}{}^{3}\ \textit{sin}\ ^{1}_{3}{}^{2}.$$

wei von diesen 6 Winkeln sind als absolut richtig zu beachten, drei andere sind gemessen und nur noch zu berichgen. Der sechste aber, $^{2}_{1}{}^{4}$ ist erst aus den gemessenen u berechnen und also auch nach ihnen zu berichtigen. Wir nden $^{2}_{1}{}^{4} = 360^\circ - {}^{1}_{4}{}^{3} - {}^{4}_{3}{}^{2} - {}^{3}_{2}{}^{1}$ und es ist bechtigt:

$$\begin{aligned}
^{1}_{4}{}^{3} &= 168^\circ\,10'\,54'' - (\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{3}{4}) \\
^{4}_{3}{}^{2} &= 45\ 54\ \ 4 - (\tfrac{4}{3}) \\
^{3}_{2}{}^{1} &= 81\ \ 9\ \ 0 \\
&295\ 13\ 58 - (\tfrac{1}{4}) - (\tfrac{4}{3}) + (\tfrac{3}{4}) \\
\text{also: } ^{2}_{1}{}^{4} &= 64\ 46\ \ 2 + (\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{4}{3}) - (\tfrac{3}{4}).
\end{aligned}$$

chlagen wir nun beiderseits die Logarithmen der Sinus auf nd nehmen für die noch nöthigen Verbesserungen die logaithmischen Differenzen zu Hülfe, denken auch diese Ver-

besserungen einstweilen in Minuten ausgedrückt, wei dies bei 5 Decimalen (die wir Kürze halber selbst bei de scharfen Berechnung der Widersprüche hier gebrau chen wollen) am bequemsten ist, so kommt:

$$\begin{aligned}
&\sin {}^{1}_{4}{}^{2} \ldots . 9{,}91669 - 8\left(\tfrac{1}{4}\right) + 8\left(\tfrac{2}{4}\right)\\
&\sin {}^{4}_{3}{}^{2} \ldots . 9{,}85621 - 12\left(\tfrac{4}{3}\right)\\
&\sin {}^{2}_{1}{}^{3} \ldots . 9{,}94038\\
&\qquad 9{,}71328 - 8\left(\tfrac{1}{4}\right) + 8\left(\tfrac{2}{4}\right) - 12\left(\tfrac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin {}^{2}_{1}{}^{4} \ldots . 9{,}95645 + 6\left(\tfrac{1}{4}\right) + 6\left(\tfrac{4}{3}\right) - 6\left(\tfrac{3}{4}\right)\\
&\sin {}^{2}_{4}{}^{3} \ldots . 9{,}96547 + 5\left(\tfrac{2}{4}\right) - 5\left(\tfrac{3}{4}\right)\\
&\sin {}^{1}_{3}{}^{2} \ldots . 9{,}79119\\
&\qquad 9{,}71311 + 6\left(\tfrac{1}{4}\right) + 5\left(\tfrac{2}{4}\right) - 11\left(\tfrac{3}{4}\right) + 6\left(\tfrac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Bedingungsgleichung:

$$0 = +17 - 14\left(\tfrac{1}{4}\right) + 3\left(\tfrac{2}{4}\right) + 11\left(\tfrac{3}{4}\right) - 18\left(\tfrac{4}{3}\right).$$

Demnach sind die Correlatengleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{4}\right) &= -14\,K_1\\
\left(\tfrac{2}{4}\right) &= +\ 3\,K_1\\
\left(\tfrac{3}{4}\right) &= +11\,K_1\\
\left(\tfrac{4}{3}\right) &= -18\,K_1.
\end{aligned}$$

Dann wird die Normalgleichung: $0 = +17 + 650\,K_1$, also endlich:

$$\begin{aligned}
K_1 = -0{,}026154;\ \left(\tfrac{1}{4}\right) &= +0',3662 = +22''\\
\left(\tfrac{2}{4}\right) &= -0\,,0785 = -\ 5\\
\left(\tfrac{3}{4}\right) &= -0\,,2877 = -17\\
\left(\tfrac{4}{3}\right) &= +0\,,4708 = +28.
\end{aligned}$$

Dies giebt uns nun die verbesserten Winkel:

$${}^{1}_{4}{}^{2} = 55^\circ 37' 35''; \quad {}^{2}_{4}{}^{3} = 112^\circ 32' 40''; \quad {}^{4}_{3}{}^{2} = 45^\circ 53' 36'',$$

so wie den daraus zusammengesetzten Winkel ${}^{2}_{1}{}^{4} = 64^\circ 47' 9''$.

Führen wir diese Werthe in unsere obige Rechnung ein, so kommt:

9,91665		9,95652
9,85615	und	9,96548
9,94038		9,79119
9,71318		9,71319

ıs, bis auf die letzte nie zu verbürgende Einheit, übereinmmt.

Jedes Seitenverhältnifs in dieser Figur wird nun immer f dieselbe Weise gefunden, welche Winkel wir auch zu ner Berechnung anwenden mögen.

Weshalb dieses letzte aus der Erfüllung unserer einen ɛdingungsgleichung nothwendig folgt, und weshalb wir rade diesen Weg einschlugen, um zu der Bedingungsgleiung zu gelangen, dies werden wir verabredetermaafsen ɜt im folgenden Abschnitte näher untersuchen.

Wollten wir uns noch über die Genauigkeit der Beachtungen unterrichten, so würden wir für unsere Richıgen wieder das [*vv*] und dann *mm* nach n. 46 zu berechn haben. Es wird aber wohl nicht nöthig seyn, diese hon mehrmals durchgemachte Rechnung in ferneren Beielen noch zu erläutern, da sie sich jeder Leser selbst maen kann.

2) Es kommt schon bei gewöhnlichen practischen Ariten sehr oft vor, dafs man ein System von zugänglichen ıkten durch eine Triangulirung oder eine sonstige Opeion ganz sicher festlegen kann, ein wichtiger Punkt aber, r mit ersteren Punkten nothwendig gut verbunden werden ıfs, zwar von den übrigen Punkten aus sichtbar, aber ɔht zugänglich ist, so dafs man darauf verzichten mufs, inkel auf ihm zu messen. In diesem Falle mufs man dann esen Punkt von wenigstens drei anderen anschneiden und e auf ihn genommenen Visirlinien durch Ausgleichung beɔhtigen. — Um dies Verfahren durch ein leichtes Bei-

spiel zu erläutern, setzen wir den Fall, es sey ein Dorf m Feldmark aufzunehmen, der Kirchthurm des Dorfes sey ab durchaus nicht zur Aufstellung geeignet und doch soll ge rade an ihn das übrige System der Aufnahme sich anknü pfen. Dann würden wir zuvörderst das Dorf mit einem Po lygone zwischen Punkten umschliefsen, an welchen der Kirch thurm sichtbar ist, die Winkelpunkte des Polygons etwa mi ihren Diagonalen oder mit anderen, rückwärts oder vorwärt liegenden Punkten zu einem Dreiecksysteme verbinden, un dieses vorerst sorgfältig bearbeiten. Gesetzt, zur Abkür zung des Beispieles, wir hätten dies zum Voraus mit solche Schärfe bewirkt, dafs das Polygon als absolut genau zu be trachten wäre. Nun nähmen wir aber die Anschnitte de Kirchthurmes allein vor, um sie auszugleichen. Unser Po lygon sey das Fünfeck **Fig. 8.** und seine definitiven Win kel seyen:

$$
\begin{array}{rcrrr}
{}^{2.5}_{1} & = & 76^\circ & 0' & 17'' \\
{}^{3.1}_{2} & = & 105 & 23 & 24 \\
{}^{4.2}_{3} & = & 147 & 26 & 59 \\
{}^{5.3}_{4} & = & 121 & 37 & 46 \\
{}^{1.4}_{5} & = & 89 & 31 & 34 \\
\hline
 & & 540 & 0 & 0.
\end{array}
$$

Sey ferner

Gemessen.		Daraus berechnet.					
${}^{6.5}_{1}$ =	25° 47′ 23″	${}^{1.6}_{5}$ =	48° 15′ 19″	${}^{5.1}_{6}$ =	105°	57′	18
${}^{6.1}_{2}$ =	56 31 22	${}^{2.6}_{1}$ =	50 12 54	${}^{1.2}_{6}$ =	73	15	44
${}^{6.2}_{3}$ =	85 28 57	${}^{3.6}_{2}$ =	48 52 2	${}^{2.3}_{6}$ =	45	39	1
${}^{6.3}_{4}$ =	83 12 39	${}^{4.6}_{3}$ =	61 58 2	${}^{3.4}_{6}$ =	34	49	19
${}^{6.4}_{5}$ =	41 16 15	${}^{5.6}_{4}$ =	38 25 7	${}^{4.5}_{6}$ =	100	18	38
					360	0	0.

Führen wir hier die Verbesserungen der Richtungen auf den Punkt 6 ein, indem wir von der Gleichung

$$\frac{6.5}{6.1}\cdot\frac{6.1}{6.2}\cdot\frac{6.2}{6.3}\cdot\frac{6.3}{6.4}\cdot\frac{6.4}{6.5}=1$$

sgehen, und rechnen wie im vorigen Beispiele, so erhal-
n wir:

$sin\,{}^{6}_{1}{}^{5}\ldots 9{,}63856-26\binom{6}{1}$	$sin\,{}^{1}_{5}{}^{6}\ldots 9{,}87280+11\binom{6}{5}$
$sin\,{}^{6}_{2}{}^{1}\ldots 9{,}92122-\ 8\binom{6}{2}$	$sin\,{}^{2}_{1}{}^{6}\ldots 9{,}88562+11\binom{6}{1}$
$sin\,{}^{6}_{3}{}^{2}\ldots 9{,}99865-\ 1\binom{6}{3}$	$sin\,{}^{3}_{2}{}^{6}\ldots 9{,}87690+11\binom{6}{2}$
$sin\,{}^{6}_{4}{}^{3}\ldots 9{,}99694-\ 2\binom{6}{4}$	$sin\,{}^{4}_{3}{}^{6}\ldots 9{,}94580+\ 7\binom{6}{3}$
$sin\,{}^{6}_{5}{}^{4}\ldots \underline{9{,}81929}-14\binom{6}{5}$	$sin\,{}^{5}_{4}{}^{6}\ldots \underline{9{,}79337}+16\binom{6}{4}$
$9{,}37466$	$9{,}37449.$

es giebt nun die **Bedingungsgleichung:**

$$0=+17-37\binom{6}{1}-19\binom{6}{2}-8\binom{6}{3}-18\binom{6}{4}-25\binom{6}{5}.$$

eraus werden nun zunächst die Correlatengleichungen ge-
det, dann die **Normalgleichung** abgeleitet:

$$0=+17+2743\,\kappa_1$$
$$\kappa_1=-0{,}0061976$$

d so finden wir am Ende:

$$\binom{6}{1}=+0',22931=+14''$$
$$\binom{6}{2}=+0{,}11775=+\ 7$$
$$\binom{6}{3}=+0{,}04958=+\ 3$$
$$\binom{6}{4}=+0{,}11156=+\ 7$$
$$\binom{6}{5}=+0{,}15494=+\ 9.$$

es giebt also endlich für die Winkel:

Verbessert.	Daraus berechnet.
${}^{6}_{1}{}^{5}=25^\circ\,47'\ 9''$	${}^{1}_{5}{}^{6}=48^\circ\,15'\,28''$
${}^{6}_{2}{}^{1}=56\ 31\ 15$	${}^{2}_{1}{}^{6}=50\ 13\ \ 8$
${}^{6}_{3}{}^{2}=85\ 28\ 54$	${}^{3}_{2}{}^{6}=48\ 52\ \ 9$
${}^{6}_{4}{}^{3}=83\ 12\ 32$	${}^{4}_{3}{}^{6}=61\ 58\ \ 5$
${}^{6}_{5}{}^{4}=41\ 16\ \ 6$	${}^{5}_{4}{}^{6}=38\ 25\ 14.$

Wiederholen wir mit diesen verbesserten Werthen unse Rechnung, so mufs sie bis auf die letzte Decimale stimme und jedes Seitenverhältnifs auf gleiche Weise gefund werden, welche Dreiecke auch zur Ableitung gebrauc seyn mögen.

§. 67.

Wir wollen hier gleich noch einige practische Beme kungen anknüpfen, ehe wir weiter gehen.

1) Die an dem letzten Beispiele erklärte Methode läf sich mit vielem Nutzen auch bei gröfseren Triangulirung (wo dann nur die sphärisch gemessenen Winkel um den dri ten Theil des sphärischen Excesses erst zu vermindern un dann nach der Ausgleichung wieder zu vermehren sind), i solchen Fällen anwenden, wenn Punkte, welche mit dem Sy steme sicher zu verknüpfen, an sich aber nicht von der äufse sten Wichtigkeit sind, von mehreren Hauptpunkten aus ange schnitten sind. — Man läfst sie bei Ausgleichung der Rich tungen zwischen den Hauptpunkten dann einstweilen aufs Acht, und betrachtet nachher letztere als absolut genau, u die Anschnitte solcher Nebenpunkte für sich demnächst al lein vorzunehmen. Ueberall, wo nun mehr als zwei An schnitte solcher Nebenpunkte vorhanden sind, giebt es dan eine besondere Ausgleichung, welche dann jedesmal auc durch die daraus abgeleiteten *corr.* Δ und V das Urthei über die Sicherheit der Bestimmung vermittelt. Beispiel der Art, die der Leser sich nach dem Studium des folgen den Abschnittes selbst ansetzen, und nach dem Verfahre dieses Abschnittes dann berechnen kann, finden sich viel fältig in den *Beiträgen u. s. w.*

2) Vor Einführung der Ausgleichungs-Rechnungen in
e practische Geometrie pflegte man bei Haupt-Triangu-
ungen seine Sicherheit blofs darin zu suchen, dafs man in
n Haupt-Dreiecken alle drei Winkel maafs, und es dann,
Verfolgung dieses Zweckes, mit der Aufstellung der In-
umente in den einzelnen Punkten so genau nicht zu neh-
n. Jetzt aber hat die Erfahrung gelehrt, dafs die Auf-
llung sehr wesentlich für die Güte der Beobachtungen
, und überdies liegt in der Ausgleichung der Richtungen
zt ein Mittel vor, über die Genauigkeit der Arbeit mit
l gröfserer Sicherheit zu urtheilen, als solches durch blofse
rgleichung der Winkelsummen mit dem sphärischen Ex-
se möglich blieb. Es ist also jedenfalls rathsam, solche
uptpunkte, worin eine ganz zuverlässige Aufstellung nicht
wonnen werden kann, die aber doch wegen ihrer weiten
htbarkeit aufs festeste mit dem übrigen Systeme zu ver-
ipfen sind, gar nicht zu Stations-Punkten zu wählen;
tt dessen aber dieselben von wenigstens drei anderen Sta-
ns-Punkten aus scharf anzuschneiden und die Anschnitte
Ausgleichungs-Rechnung zu unterwerfen. In diesem
lle, wo der blofs angeschnittene Punkt also eben so wich-
ist, als die übrigen, darf man nicht mehr die Richtun-
n zwischen den übrigen als absolut genau annehmen, son-
n mufs die Ausgleichung für alle Richtungen in einer und
selben Rechnung suchen, wenn man wirklich das sicherste
sultat sucht. Es wird dies gleich an einem besonderen
spiele erläutert werden. Aber schon im zweiten Beispiele
vorigen §. hätten wir, wenn der Kirchthurm eben so
htig war, als die übrigen Punkte, nicht letztere erst al-
n bearbeiten und dann als absolut genau betrachten dürfen.

§. 68.

Wir wollen nun zu Rechnungs-Beispielen übe
gehen, worin Bedingungsgleichungen zweiter und dritt
Klasse zusammen vorkommen.

1) Zuerst mag das Beispiel vorgenommen werden, w
von am Ende des §. 10. schon die Rede war, und wollen v
dabei Kürze halber auch die scharf zu machenden Rechnu
gen nur mit fünf Decimalen führen. Gesetzt also, es s
Fig. 9. der Punkt 4 nicht zu sicherer Aufstellung geei
net; in den übrigen drei Punkten seyen die Winkel dur
Repetition und Horizont-Abschlufs nach §. 26. und 56. b
arbeitet, und wir hätten zu weiterer Ausgleichung, in d
Voraussetzung, dafs die beobachteten Richtungen alle glei
genau seyen, folgende:

Abgeschlossene Azimuthe:

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2. A	3. A	4. A
3. $A+47^\circ35'26''$	4. $A+53^\circ37'20''$	1. $A+24^\circ28'4$
4. $A+95\ 23\ 17$	1. $A+81\ 10\ 42$	2. $A+75\ 42\ 2$

Hier sehen wir zuerst ein Dreieck geschlossen zwische
den Punkten 1; 2; 3, welches wir Kürze halber als ebe
betrachten wollen. Wir stellen also zusammen:

$$\begin{aligned} {}^{2}_{1}{}^{3} &= 47^\circ\ 35'\ 26'' \\ {}^{3}_{2}{}^{1} &= 81\ 10\ 42 \\ {}^{1}_{3}{}^{2} &= 51\ 13\ 40 \\ \hline & 179\ 59\ 48, \end{aligned}$$

und haben daraus unser $w_{\text{I}} = -12'' = -0',2$ und somi
die erste Bedingungsgleichung, welche zweiter Klasse ist

$$0 = -0,2-(\tfrac{2}{1})+(\tfrac{3}{1})+(\tfrac{1}{2})-(\tfrac{3}{2})-(\tfrac{1}{3})+(\tfrac{2}{3}).$$

einer zweiten Bedingungsgleichung, welche dritter
asse ist, gelangen wir auf ähnliche Weise wie im §. 66.

Es mufs nämlich seyn

$$\frac{\dot{4}.\dot{1}}{\dot{4}.\dot{2}} \cdot \frac{\dot{4}.\dot{2}}{\dot{4}.\dot{3}} \cdot \frac{\dot{4}.\dot{3}}{\dot{4}.\dot{1}} = 1,$$

h. es müfste seyn, wenn alle Richtungen absolut genau
ren,

$$sin\,{}^{4}_{2}{}^{1} \,.\, sin\,{}^{4}_{3}{}^{2} \,.\, sin\,{}^{3}_{1}{}^{4} = sin\,{}^{2}_{1}{}^{4} \,.\, sin\,{}^{3}_{2}{}^{4} \,.\, sin\,{}^{4}_{3}{}^{1},$$

er in Zahlen

27 33 22 . *sin* 75 42 25 . *sin* 47 47 51 = *sin* 95 23 17 . *sin* 53 27 20 . *sin* 24 28 45

o

$9{,}66522 - 24\,(\frac{4}{2}) + 24\,(\frac{1}{2})$	$9{,}99808 + 1\,(\frac{2}{1}) - 1\,(\frac{4}{1})$
$9{,}98634 - 3\,(\frac{4}{3}) + 3\,(\frac{2}{3})$	$9{,}90586 - 9\,(\frac{3}{2}) + 9\,(\frac{4}{2})$
$9{,}86968 - 11\,(\frac{3}{1}) + 11\,(\frac{4}{1})$	$9{,}61738 - 28\,(\frac{4}{3}) + 28\,(\frac{1}{3})$
$9{,}52124$	$9{,}52132.$

mnach haben wir unsere zweite Bedingungsgleichung:

$$+8+1(\tfrac{2}{1})+11(\tfrac{3}{1})-12(\tfrac{4}{1})-24(\tfrac{1}{2})-9(\tfrac{3}{2})+33(\tfrac{4}{2})+28(\tfrac{1}{3})-3(\tfrac{2}{3})-25(\tfrac{4}{3})$$

s den beiden Bedingungsgleichungen ergeben sich nun
Correlatengleichungen:

$=-K_1+K_2$	$(\frac{1}{2})=+K_1-24K_2$	$(\frac{1}{3})=-K_1+28K_2$
$=+K_1+11K_2$	$(\frac{3}{2})=-K_1-9K_2$	$(\frac{2}{3})=+K_1-3K_2$
$=-12K_2$	$(\frac{4}{2})=+33K_2$	$(\frac{4}{3})=-25K_2.$

r die Normalgleichungen bilden wir nach n. 45

$$[aa] = +6$$
$$[ab] = -36$$
$$[bb] = +3430$$

l haben also

$$0 = -0{,}2 + 6K_1 - 36K_2$$
$$0 = +8 - 36K_1 + 3430K_2.$$

Hieraus durch Elimination: $\varkappa_1 = +0{,}02064$; $\varkappa_2 = -0{,}0021$
Dies giebt dann endlich:

$(\frac{2}{1}) = -0{,}02276 = -1{,}37''$	$(\frac{1}{2}) = +0{,}07152 = +4{,}29''$	$(\frac{1}{3}) = -0{,}08000 = -4{,}8$
$(\frac{3}{1}) = -0{,}00268 = -0{,}16$	$(\frac{3}{2}) = -0{,}00156 = -0{,}09$	$(\frac{2}{3}) = +0{,}02700 = +1{,}6$
$(\frac{4}{1}) = +0{,}02544 = +1{,}53$	$(\frac{4}{2}) = -0{,}06996 = -4{,}20$	$(\frac{4}{3}) = +0{,}05300 = +3{,}1$

Diese Verbesserungen haben wir nun als *corr.* Δ an un sere abgeschlossenen Azimuthe anzubringen. Wir könne uns aber hier, gerade so wie §. 56., noch die Bequemlich keit verschaffen, dafs das unbestimmte Azimuth des erste Punktes, welches vorher A hiefs, auch ferner nach der Ver besserung blofs mit A bezeichnet wird, wenn wir nur di *corr.* Δ der ersten Richtung jeder Station von allen übrige abziehen. So erhalten wir:

$(\frac{2}{1}) = 0$	$(\frac{1}{2}) = +4'',38$	$(\frac{1}{3}) = -7'',98$
$(\frac{3}{1}) = +1'',21$	$(\frac{3}{2}) = 0$	$(\frac{2}{3}) = -1,56$
$(\frac{4}{1}) = +2,90$	$(\frac{4}{2}) = -4,11$	$(\frac{4}{3}) = 0.$

Dies giebt uns dann die

Ausgeglichenen Azimuthe:

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2. A	3. A	4. A
3. A+47°35′27″,21	4. A+53°27′15″,89	1. A+24°28′37″,0
4. A+95 23 19 ,90	1. A+81 10 46 ,38	2. A+75 42 23 ,4

Vermittelst dieser ausgeglichenen Azimuthe könne wir nun nicht nur die obigen Gleichungen neu berechnen wo dann alles bis auf die letzte Decimale stimmt, sonder auch jede weitere Rechnung machen, die sich auf das be handelte Liniensystem als solches bezieht.

Nur die Verknüpfung mit anderen Systemen erforder dann noch ein der Ausgleichungs-Rechnung an sich frem des Geschäft, die Orientirung, d. h. die Bestimmung eines der obigen A, woraus die übrigen dann folgen. Um

ıch dieses letzte noch in einem Beispiele zu erläutern, wol-
n wir setzen, es wäre das A der zweiten Station gefunden
: 273°39′50″; so wären die beiden folgenden Azimuthe
eser Station durch Substitution dieser Zahl zuerst zu fin-
en. Dann hätte man (immer vorausgesetzt, daſs das Sy-
em als eben betrachtet werden könne) zu dem Azimuthe
r Richtung $\frac{1}{2}$ nur 180° zuzusetzen, um das Azimuth der
ichtung $\frac{2}{1}$, d. h. um das A der ersten Station zu haben.
ir die dritte Station fände man dann das A entweder durch
-180° — 24°28′37″,02 oder durch $\frac{3}{2}$ + 180° — 75°42′23″,44.
ıdurch erhielten wir endlich die

Definitiven Azimuthe:

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2. 174°50′36″,38	3. 273°39′50″,00	4. 17°57′26″,56
3. 222 26 3 ,59	4. 327 7 5 ,89	1. 42 26 3 ,58
4. 270 13 56 ,28	1. 354 50 36 ,38	2. 93 39 50 ,00.

Die beiden Bestimmungen für A, die wir hier auf der
itten Station erhalten, sind um 0″,01 verschieden, was
n Abrundung der Decimalen herrührt. Will man in sol-
en Fällen das Aeuſserste thun, so setzt man das Mittel an.

Es versteht sich übrigens von selbst, daſs die Bruch-
ıllen der ausgeglichenen und definitiven Azimuthe in die-
m Beispiele durchaus ohne allen reellen Werth sind,
il wir zur Abkürzung der Rechnung auch selbst bei den
idersprüchen nur 5 Decimalen gebrauchten. Kommen
s also in der Praxis Fälle vor, bei denen es auf sichere
eststellung der Secunde ankommt, so ist die Rechnung für
e absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen, die immer
harf seyn muſs, auch immer mit 7 Decimalen auszu-
hren.

2) Wir haben bis jetzt in diesem Kapitel nur solche
ispiele vorgenommen, in welchen bloſs Winkel oder Rich-

tungen zu verbessern waren, weil der Ansatz der Bedingungsgleichungen dabei sich leichter übersieht, als in den beiden übrigen Fällen, wo entweder blofs Linienmessungen oder wo sowohl Linienmessungen als Winkelmessungen zu verbessern sind. Die Berechnung von den angesetzten Bedingungsgleichungen aus, womit wir uns in diesem Abschnitte allein beschäftigen, bleibt natürlich bei Beispielen letzter Art immer dieselbe, wie wir sie bisher gemacht haben. Wir wollen nun aber zuletzt doch auch noch ein leichtes Beispiel vornehmen, worin Winkel und Linien vorkommen, und also setzen, es sey in einem Dreiecke **Fig. 10** gemessen:

$$\overset{2.3}{1} = 57^\circ\,55' \qquad \overset{2.3}{\cdot\cdot} = 698 \text{ Zehntel-Ruthen}$$
$$\overset{3.1}{2} = 46\;40 \quad \text{und überdies} \quad \overset{3.1}{\cdot\cdot} = 604 \;-\; -$$
$$\overset{1.2}{3} = 75\;36 \qquad \overset{1.2}{\cdot\cdot} = 801 \;-\; -$$

Zuerst müssen wir, weil hier heterogene Gröfsen vorkommen, nach §. 8. uns um die mittleren Fehler unserer Messungen bekümmern. Gesetzt nun, zur Abkürzung, es sey uns bekannt, dafs wir eine Zehntel-Ruthe als mittleren Fehler der Linienmessungen, und eine Minute als mittleren Fehler der Richtungen schätzen könnten. Dann brauchen wir blofs die Linienmessungen in Zehntel-Ruthen auszudrücken, wie oben schon geschehen ist, und können alle als unbenannte Zahlen ohne Weiteres bearbeiten.

Nun erhalten wir unmittelbar die Bedingungsgleichung zweiter Klasse:

$$0 = +11 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}$$

weil sich, widersprechenderweise, die Winkelsumme $= 180^\circ 11'$ zeigt.

Ferner haben wir für die Bedingungsgleichungen dritter Klasse, durch Division der Seiten mit den Sinus der ge-

enüberliegenden Winkel, wobei gleiche Quotienten erschei-
en sollten:

$$log\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\,\cdot} = 2{,}84386 + 62{,}5\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\,\cdot})$$
$$g\,sin\,{}^{2}_{1}{}^{3} = \underline{9{,}92803 - 7{,}5\,({}^{2}_{1}) + 7{,}5\,({}^{3}_{1})}$$
$$2{,}91583 + 62{,}5\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\,\cdot}) + 7{,}5\,({}^{2}_{1}) - 7{,}5\,({}^{3}_{1})$$

$$log\,{}^{3\cdot 1}_{\cdot\,\cdot} = 2{,}78104 + 72\,({}^{3\cdot 1}_{\cdot\,\cdot})$$
$$g\,sin\,{}^{3}_{2}{}^{1} = \underline{9{,}86176 - 12\,({}^{3}_{2}) + 12\,({}^{1}_{2})}$$
$$2{,}91928 + 72\,({}^{3\cdot 1}_{\cdot\,\cdot}) + 12\,({}^{3}_{2}) - 12\,({}^{1}_{2})$$

$$log\,{}^{1\cdot 2}_{\cdot\,\cdot} = 2{,}90363 + 54\,({}^{1\cdot 2}_{\cdot\,\cdot})$$
$$g\,sin\,{}^{1}_{3}{}^{2} = \underline{9{,}98614 - 3{,}5\,({}^{1}_{3}) + 3{,}5\,({}^{2}_{3})}$$
$$2{,}91749 + 54\,({}^{1\cdot 2}_{\cdot\,\cdot}) + 3{,}5\,({}^{1}_{3}) - 3{,}5\,({}^{2}_{3}).$$

So bekommen wir also, durch Abziehung der beiden
ußeren Logarithmen vom mittelsten, zwei weitere Be-
ingungsgleichungen, und, wenn wir in letzteren überall
it 2 multipliciren, um die 0,5 hinter einigen Coefficienten
egzuschaffen und dadurch letztere in lauter ganzen Zahlen
u erhalten, so sind nun unsere drei Bedingungsglei-
hungen:

$$=+\,11 - ({}^{2}_{1}) + ({}^{3}_{1}) - ({}^{3}_{2}) + ({}^{1}_{2}) - ({}^{1}_{3}) + ({}^{2}_{3})$$
$$=+690+144({}^{3\cdot 1}_{\cdot\,\cdot}) - 125({}^{2\cdot 3}_{\cdot\,\cdot}) + 24({}^{3}_{2}) - 24({}^{1}_{2}) - 15({}^{2}_{1}) + 15({}^{3}_{1})$$
$$=+358+144({}^{3\cdot 1}_{\cdot\,\cdot}) - 108({}^{1\cdot 2}_{\cdot\,\cdot}) + 24({}^{3}_{2}) - 24({}^{1}_{2}) - 7({}^{1}_{3}) + 7({}^{2}_{3})$$

ies giebt die Correlatengleichungen:

$$)=-\kappa_1-15\kappa_2 \qquad (\tfrac{1}{2})=+\kappa_1-24\kappa_2-24\kappa_3 \qquad ({}^{1\cdot 2}_{\cdot\,\cdot})= \quad -108\kappa_3$$
$$)=+\kappa_1+15\kappa_2 \qquad (\tfrac{1}{3})=-\kappa_1 \quad -7\kappa_3 \qquad ({}^{2\cdot 3}_{\cdot\,\cdot})=-125\kappa_2$$
$$)=-\kappa_1+24\kappa_2+24\kappa_3 \qquad (\tfrac{2}{3})=+\kappa_1 \quad +7\kappa_3 \qquad ({}^{3\cdot 1}_{\cdot\,\cdot})=+144\kappa_2+144\kappa_3$$

ieraus berechnen wir

$$[aa] = +\,6 \qquad [bb] = +37963$$
$$[ab] = -18 \qquad [bc] = +21888$$
$$[ac] = -34 \qquad [cc] = +33650.$$

lso sind die Normalgleichungen:

$$0 = +\ 11 + 6\kappa_1 - 18\kappa_2 - 34\kappa_3$$
$$0 = +690 - 18\kappa_1 + 37963\kappa_2 + 21888\kappa_3$$
$$0 = +358 - 34\kappa_1 + 21888\kappa_2 + 33650\kappa_3 .$$

Hieraus endlich durch Elimination:

$$\kappa_1 = -1{,}8912$$
$$\kappa_2 = -0{,}01894$$
$$\kappa_3 = -0{,}000203 .$$

Die Substitution in die Correlatengleichungen giebt:

$(\frac{2}{1}) = -(\frac{3}{1}) = +2'{,}17530 \quad (\frac{3}{2}) = -(\frac{1}{2}) = +1'{,}431768 \quad (\frac{1}{3}) = -(\frac{2}{3}) = +1'{,}892621$
$= +2'\ 10''{,}5 \qquad = +1'\ 25''{,}9 \qquad = +1'\ 53''{,}6$

$(\frac{1}{\cdot}\cdot\frac{2}{\cdot}) = +0{,}0219 \qquad (\frac{2}{\cdot}\cdot\frac{3}{\cdot}) = +2{,}3675 \qquad (\frac{3}{\cdot}\cdot\frac{1}{\cdot}) = -2{,}7566 .$

Werden diese Verbesserungen gehörig angebracht, so erhalten wir nun unser Dreieck ausgeglichen:

$\frac{2}{1}\frac{3}{\cdot}$	$= 57^\circ\ 50'\ 39''$	$\frac{2}{\cdot}\cdot\frac{3}{\cdot}$	$= 700{,}368$ Zehntel-Ruthen
$\frac{3}{2}\frac{1}{\cdot}$	$= 46\ 37\ 8$	$\frac{3}{\cdot}\cdot\frac{1}{\cdot}$	$= 601{,}243$ - -
$\frac{1}{3}\frac{2}{\cdot}$	$= 75\ 32\ 13$	$\frac{1}{\cdot}\cdot\frac{2}{\cdot}$	$= 801{,}022$ - -
	$180\ 0\ 0.$		

Die Rechnung, welche oben zu den Bedingungsgleichungen dritter Klasse führte, mit diesen Zahlen wiederholt, stimmt bis auf die letzte Decimale.

§. 69.

Wir wollen nun zum Schlusse dieses Kapitels noch ein Paar Bemerkungen beifügen:

1) Entwerfen wir uns für das letzte Beispiel des vorigen §. die Zeichnung wieder in vergrößertem Maafsstabe der Richtungs-Fehler **Fig. 10.**, so finden wir an den ausgeglichenen Richtungen Dreiecke angetragen, die nicht mehr gleichschenklig sind. Dieses rührt im Gegensatz gegen **Fig. 3.** und **4.** im §. 64. und in Beziehung auf un-

ere zweite Bemerkung des §. 65. daher, dafs hier aufser er Bedingungsgleichung zweiter Klasse auch noch Bedingungsgleichungen dritter Klasse zu erfüllen waren. — Dagegen bemerken wir hier, einstweilen blofs als Thatsache, en Umstand, dafs die Richtungsverbesserungen an den einelnen Winkelpunkten des Dreieckes überall beiderseits gleich rofs sind, ihre algebraische Summe also $= 0$ wird.

2) Vergleichen wir nun zuerst unser erstes Beispiel im . 68., wo auch Bedingungsgleichungen beider Klassen vorommen, so finden wir dieselbe Thatsache wieder, indem dort

$$\begin{aligned}(^2_1)+(^3_1)+(^4_1)&=0\\(^1_2)+(^3_2)+(^4_2)&=0\\(^1_3)+(^2_3)+(^4_3)&=0\end{aligned}$$

urde, ehe wir die gemeinschaftliche *corr.* Δ für A anbrachn, und also auch hier die Richtungsverbesserungen, die on einem Punkte ausgehen, sich aufheben, obwohl deren ehr als zwei sind.

3) Gehen wir nun aber auf unser erstes Beispiel im . 66. zurück, wo nur eine Bedingungsgleichung dritter lasse gebraucht war, so haben wir wieder an dem einzigen unkte 4, wo alle Richtungen zu verbessern waren:

$$(^1_4)+(^2_4)+(^3_4)=0$$

nd nun sehen wir auch leicht den geometrischen Grund diee bis jetzt blofs als Thatsache beobachteten Erscheinung n. Er liegt wesentlich darin, dafs wir nicht die Winkel n Ganzen, sondern in ihren beiden Richtungen verbessert aben. Die Art und Weise, wie wir zu den Bedingungsleichungen dritter Klasse gelangen, mag nämlich seyn elche sie will; es sind immer nothwendig die Winkel,

welche zu der Berechnung der Coefficienten in den Bedingungsgleichungen führen. Die beiden Richtungsverbesserungen also, welche für eine Winkelverbesserung eintreten, erhalten bei der Bildung der Bedingungsgleichungen überall zunächst nothwendig gleiche Coefficienten mit verschiedenem Zeichen. Gehen also nun nur zwei Richtungen in einen Punkt zusammen, wie im zweiten Beispiele des §. 68., so müssen die Correlaten-Gleichungen gleiche und entgegengesetzte Werthe für dieselben geben. Sind aber mehrere zu verbessernde Richtungen an einem Punkte, wie im ersten Beispiele des §. 68., so entspricht jeder Richtung, die als linker Schenkel eines Winkels erscheint, eine der übrigen als rechter Schenkel, und wenn nun also eine und dieselbe linke Richtung auch mit mehreren anderen als rechten verbunden werden kann und mufs, so müssen doch immer in den Correlatengleichungen alle Richtungsverbesserungen, die von einem Punkte ausgehen, sich unter einander aufheben.

4) Nehmen wir dieses nun mit der obigen Bemerkung in §. 65. 3) zusammen, so können wir allgemein den Satz aufstellen:

> Wenn alle an einem Punkte zusammengehenden gleichgenauen Richtungen verbessert werden, gleichviel ob durch Bedingungsgleichungen zweiter oder dritter Klasse oder beider Klassen, so mufs die algebraische Summe der Verbesserungen $= 0$ seyn.

Dieses Satzes können wir uns mit Nutzen bedienen, um bei weitläufigen Rechnungen unsere Arbeit schon bei Aufstellung der Correlatengleichungen und hernach unmittelbar nach der Elimination und Substitution erst zu prüfen, ehe wir weiter rechnen.

Solche Fälle, wo wir einzelne Richtungen als absolut genau betrachten und also die Winkelverbesserungen auch einseitig an einer Richtung anbringen, gehören natürlich nicht unter diesen Satz. Wir haben dergleichen im §. 66., bei dem ersten Beispiele für den Punkt 3, und bei dem zweiten Beispiele für sämmtliche Polygon-Punkte gehabt.

Siebentes Kapitel.

Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

§. 70.

Die Verschiedenheit in der Genauigkeit der Beobachtungen drücken wir hier wieder am bequemsten durch die Gewichte p_1; p_2; p_3 ... für die Beobachtungen o_1; o_2; o_3 ... aus, und gehen nun auf unsere §§. 58. und 59. zurück, um nachzusehen, was sich durch Rücksicht auf diese Gewichte in unseren Operationen ändern mufs.

Hier sehen wir nun zuerst, dafs sich in unseren Gleichungen (9), (10) und (11) gar nichts ändern kann, und dafs wir also die Bedingungsgleichungen eben so ansetzen, als ob die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit wären.

Sodann aber bemerken wir, dafs jetzt $[pvv]$ zu einem Minimum zu machen ist, aus den im §. 8. angegebenen Gründen, und dafs also, wenn wir dieselben Schlüsse anwenden, wie im §. 59. auf (12) angewandt wurden, uns endlich statt der Gleichung (14) nun die andere kommt:

$$(15) \quad 0 = p_1 v_1 dv_1 + p_2 v_2 dv_2 + p_3 v_3 dv_3 + p_4 v_4 dv_4 + \ldots$$

Verbinden wir nun diese letzte Gleichung mit den unveränder-

dert bleibenden Gleichungen (13) eben so wie oben, so erhalten wir die Correlatengleichungen:

n. 47.
$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1 \kappa_1}{p_1} + \frac{b_1 \kappa_2}{p_1} + \frac{c_1 \kappa_3}{p_1} + \ldots \\ v_2 &= \frac{a_2 \kappa_1}{p_2} + \frac{b_2 \kappa_2}{p_2} + \frac{c_2 \kappa_3}{p_2} + \ldots \\ v_3 &= \frac{a_3 \kappa_1}{p_3} + \frac{b_3 \kappa_2}{p_3} + \frac{c_3 \kappa_3}{p_3} + \ldots \\ v_4 &= \frac{a_4 \kappa_1}{p_4} + \frac{b_4 \kappa_2}{p_4} + \frac{c_4 \kappa_3}{p_4} + \ldots \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Correlatenleichungen in die Bedingungsgleichungen giebt dann die Normalgleichungen:

n. 48.
$$\begin{aligned} 0 &= w_1 + \left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] K_3 + \\ 0 &= w_2 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] K_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] K_3 + \\ 0 &= w_3 + \left[\frac{ac}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] K_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] K_3 + \end{aligned}$$

Die Elimination und Substitution geschieht dann natürlich unverändert wie früher.

Demnach läfst sich die durch Verschiedenheit der Genauigkeit nothwendig werdende Abänderung des früheren Verfahrens in die Regel zusammenfassen:

> Vor dem Uebergange von den Correlatengleichungen zu den Normalgleichungen dividire man jede der ersteren auf ihrer rechten Seite mit dem Gewichte der Beobachtung, für welche sie gilt.

§. 71.

Zur Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen haben wir auch hier von dem $[pvv]$ auszugehen, welches wir nach dem vorigen §. immer berechnen können. Wir bestimmen zuerst wieder den mittleren Fehler der Gewichts-

inheit, der wieder m heifsen mag; und haben dann un-
ittelbar nach n. 17

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}};\quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}};\quad m_3 = \frac{m}{\sqrt{p_3}} \text{ u. s. w.}$$

ır Bestimmung des m aber führen uns ganz ähnliche Be-
ıchtungen, wie wir im §. 61. anstellten. Wir überlegen
mlich, dafs wir $z_o - z_b$ Beobachtungen der Gewichts-
nheit fehlerfrei gemacht haben müfsten, um sie als Ele-
ente zu betrachten, daraus unsere sämmtlichen Beobach-
ıgen zu berechnen und deren Abweichung von der Wahr-
it zu bestimmen. Demnach können wir hier die Gleichung
42 unmittelbar anwenden, wenn wir nur $z_o - z_b = z_e$ se-
en. Dies giebt uns also

$$\text{n. 49.} \qquad m = \sqrt{\frac{[pvv]}{z_b}}.$$

§. 72.

Zu Rechnungs-Beispielen wollen wir solche
ihlen, die schon im vorigen Kapitel unter der Vorausse-
ıng gleicher Genauigkeit berechnet sind. Wir können
nn die Bedingungsgleichungen, deren Ansatz uns ohne-
ı noch unklar ist, gleich beibehalten:

1) Sey zuerst das im §. 63. behandelte Dreieck
ig. 1.

$$\begin{aligned} o_1 &= 36^\circ\,25'\,47'' \\ o_2 &= 90\;\;36\;\;28 \\ o_3 &= 52\;\;57\;\;57 \\ \hline & 180\;\;\;0\;\;12 \end{aligned}$$

eder auszugleichen, aber jetzt unter der Voraussetzung,
fs die Winkel verschiedene Repetitionszahlen gehabt hät-
ı und darnach zu setzen wäre $p_1 = 4$; $p = 2_2$; $p_3 = 3$.

Wir behalten also die Bedingungsgleichung:

$$0 = +12 + v_1 + v_2 + v_3 .$$

Die Correlatengleichungen, nach dem Gewichte modificirt, werden aber

$$v_1 = +\tfrac{1}{4} K_1$$
$$v_2 = +\tfrac{1}{2} K_1$$
$$v_3 = +\tfrac{1}{3} K_1 .$$

Demnach wird die Normalgleichung:

$$0 = +12 + \tfrac{13}{12} K_1 ,$$

daraus $K_1 = -\frac{144}{13} = -11{,}077$ und also $v_1 = -2'',7$
$v_2 = -5{,}5$
$v_3 = -3{,}6$

Also wird das ausgeglichene Dreieck:

36°	25′	44″,23
90	36	22 ,46
52	57	53 ,31
180	0	0 ,00.

Wir machen hier beiläufig die Bemerkung, dafs die Vertheilung des Fehlers in der Winkelsumme im umgekehrten Verhältnisse der Gewichte geschehen mufs; statt dafs bei gleich genauen Beobachtungen auch gleich getheilt werden mufste.

Die Rechnung für die Genauigkeit giebt:

$p_1 v_1 v_1 = 4 . \ 7{,}6729 = \ 30{,}6916 \qquad m_1 = \pm 5'',76$
$p_2 v_2 v_2 = 2 . 30{,}6916 = \ 61{,}3832 \qquad m_2 = \pm 8{,}15$
$p_3 v_3 v_3 = 3 . 13{,}6161 = \ 40{,}8483 \qquad m_3 = \pm 6{,}65$
$132{,}8231$

$$m = \sqrt{132{,}8231} = \pm 11'',52 .$$

2) Gleichen wir dasselbe Dreieck durch Richtungsverbesserungen aus, so ist die Bedingungsgleichung:

$$= +12 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}.$$

r die Correlatengleichungen haben wir zu bemer-
, dafs das Gewicht jeder Richtung hier gleich gesetzt
den kann dem obigen Gewichte des zugehörigen Win-
s, indem jede Richtung in diesem besonderen Falle so
zum Anschnitt kommt, als der Winkel repetirt wird. So
alten wir:

$$\binom{2}{1} = -\tfrac{1}{4}K_1 \qquad \binom{1}{2} = +\tfrac{1}{2}K_1$$
$$\binom{3}{1} = +\tfrac{1}{4}K_1 \qquad \binom{1}{3} = -\tfrac{1}{3}K_1$$
$$\binom{3}{2} = -\tfrac{1}{2}K_1 \qquad \binom{2}{3} = +\tfrac{1}{3}K_1.$$

glich ist die Normalgleichung:

$$0 = 12 + \tfrac{13}{6}K_1; \quad K_1 = -\tfrac{72}{13} = -5{,}5385$$

l demnach

$$\binom{2}{1} = +1'',3846 \qquad \binom{1}{2} = -2'',7692$$
$$\binom{3}{1} = -1\,,3846 \qquad \binom{1}{3} = +1\,,8461$$
$$\binom{3}{2} = +2\,,7692 \qquad \binom{2}{3} = -1\,,8461.$$

Verbesserungen der Winkel werden hier genau diesel-
wie oben. Das $[pvv]$ wird aber, halb so grofs wie im
igen Beispiele, $= 66{,}4115$, also $m = \pm 8'',15 = \frac{1'',52}{\sqrt{2}}$ was auch ganz mit n. 21 übereinstimmt.

Hätten wir diesen letzten Umstand gleich vom Anfange
ücksichtigen und also die Gewichtszahlen für die Rich-
gen durch 8, 4, 6 ausdrücken wollen, so würde dies in
Resultaten gar nichts geändert haben, wie wir uns leicht
n Voraus schon dadurch überzeugen konnten, dafs die
tsetzung der Gewichts-Einheit willkührlich ist, da es
auf das Verhältnifs der p ankommt.

Wollen wir uns unsere Richtungs-Verbesserungen wie-
durch Zeichnung veranschaulichen, so finden wir wie-
an jedem Punkte gleich grofse Verbesserungen von ent-

gegengesetztem Zeichen. Nehmen wir nun hiervon Veranlassung darüber nachzudenken, ob der am Ende des §. 6 aufgestellte allgemeine Satz auch hier, wo ungleich genaue Beobachtungen vorliegen, noch gültig sey, so finden wir, dafs diese Frage, aus den dort angeführten Gründen, jetzt nicht mehr zu bejahen ist, indem die Correlatengleichungen nach Division mit den verschiedenen p sich nicht mehr aufheben können.

3) Wir wollen nun setzen, in dem ersten Beispiele des §. 66. (*Pothenot. Aufg. S.* 9.) wären die Winkel an den zu bestimmenden Punkte 4 mit einem Theodolithen von ungeordneter Güte gemessen, aber öfters repetirt und auf den Horizont abgeschlossen. Der Winkel an dem Punkte 3 aber wäre mit dem Haupt-Instrumente gemessen, und nach §. 57. 5) durch Einschaltung in die abgeschlossenen Azimuthe gefunden. — Dann könnten wir also nicht, wie §. 66. geschehen, ohne Weiteres die Richtungen für gleich genau halten, sondern müfsten erst, nach den Grundsätzen der früheren Kapitel, die Gewichte dieser hier auszugleichenden Richtungen suchen.

Gesetzt nun, es wäre durch diese Untersuchung gefunden, dafs das Gewicht der in 4 festgelegten Richtungen nur $\frac{2}{3}$ von dem Gewichte der Richtung $\frac{4}{3}$ betrüge; so setzten wir ersteres $= 2$ und letzteres $= 3$. Damit bekämen wir aus der beibehaltenen Bedingungsgleichung:

$$0 = +17 - 14\,(\tfrac{1}{4}) + 3\,(\tfrac{2}{4}) + 11\,(\tfrac{3}{4}) - 18\,(\tfrac{4}{3}).$$

die modificirten Correlatengleichungen:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{4}) &= -\,7\,K_{\text{I}}\\ (\tfrac{2}{4}) &= +\,\tfrac{3}{2}\,K_{\text{I}}\\ (\tfrac{3}{4}) &= +\,\tfrac{11}{2}\,K_{\text{I}}\\ (\tfrac{4}{3}) &= -\,6\,K_{\text{I}},\end{aligned}$$

raus die Normalgleichung: $0 = +17 + 271\,\kappa_1$
h. $\kappa_1 = -0{,}06273$ und endlich die Verbesserungen:

$$(\tfrac{1}{4}) = +0',4391 = +26'',35$$
$$(\tfrac{2}{4}) = -0\,,0941 = -\ 5\,,65$$
$$(\tfrac{3}{4}) = -0\,,3450 = -20\,,70$$
$$(\tfrac{4}{3}) = +0\,,3764 = +22\,,58.$$

mnach erhalten wir die verbesserten Winkel:

$$^1_4{:}^2 = 55^\circ\,37'\,30''$$
$$^2_4{:}^3 = 112\ 32\ 37 \text{ und daraus } ^2_1{:}^4 = 64^\circ\,47'\,12''.$$
$$^4_3{:}^2 = 45\ 53\ 41$$

e Substitution dieser Werthe giebt:

9,91665	9,95652
9,85616	9,96548
9,94038	9,79119
9,71319	9,71319

l ist also jetzt vollkommene Harmonie hergestellt.

Es scheint überflüssig, noch mehrere Beispiele der Art tzutheilen. Da der Gang der Rechnung immer derselbe ibt, und nur die Correlatengleichungen nach den Gewich- zu modificiren sind, so können alle in dem vorigen Ka- el vorgetragene Beispiele zu weiterer Uebung gebraucht rden.

§. 73.

Nur auf einen Umstand, der auch schon bei den Rech- ıgen des vorigen Abschnittes seine Anwendung findet, ſs ich diejenigen Leser, welche erst anfangen mit diesen chnungen sich zu beschäftigen, hier zuletzt noch auf- rksam machen.

Der Gewinn an Sicherheit und Genauigkeit, den uns Ausgleichungsrechnung dadurch gewährt, daſs sie uns

immer dasjenige Resultat giebt, welches sich an alle vo
handenen Thatsachen möglichst nahe anschliefst, wi
nothwendig immer mit einem Aufwande von Zeit und Mü
erkauft. Diesen mufs man also in der Praxis möglichst
vermindern suchen. —

Das ist nun allerdings zum grofsen Theile Sache d
Uebung, und geht es dabei wie bei jeder anderen Rec
nungs-Arbeit, die bei den ersten Anwendungen mühsa
und zeitraubend ist, hernach aber, wenn sie durch Uebu
gleichsam mechanisch geworden ist, spielend leicht ersche
nen kann. Aber viel kann man auch schon vom Anfan
herein durch gehörige Ueberlegung und darnach eingeric
tete zweckmäfsige Anlage der Arbeit thun; und dahin g
hört vor Allem der Beschlufs über die Decimalstellen, d
man noch berücksichtigen und die Logarithmentafeln, d
man gebrauchen will.

Die Rechnung ist in unseren bisherigen Beispielen nu
fast ausschliefslich immer mit fünfstelligen Logarithmen g
macht, und dieses kann für alle Rechnungen, welche nac
den Bedingungsgleichungen zu machen sind, auch als, fa
ausnahmslose, Regel selbst in den wichtigsten und del
catesten Fällen beibehalten werden. Eine andere Sach
aber ist es mit der Berechnung der Widersprüche, sowol
im vorigen Abschnitte als auch im gegenwärtigen, (also b
den absoluten Gliedern der Bedingungsgleichungen). Dies
Widersprüche müssen immer scharf berechnet werde
d. h. so scharf, als es die Umstände verstatten oder erfor
dern. Wir müssen hier also immer zum Voraus überlege
welchen Grad von Genauigkeit wir in unserem Resultate etw
zu erwarten oder zu verlangen berechtigt sind.

Nun wissen wir, dafs die fünfstelligen Logarithmen
sehr seltene Fälle abgerechnet, die sich dann von selbst an

gen, uns die Winkel auf etwa 5″ und also die Seiten auf
va $\frac{1}{40000}$ des Ganzen genau angeben. In allen Fällen
o, wo wir überhaupt keine gröfsere Genauigkeit erstre-
n wollen und sollen, würde es ganz überflüssige Mühe
d eine unverantwortliche Zeitverschwendung seyn, wenn
r die siebenstelligen oder auch nur sechsstellige Tafeln
wendeten. Wo es aber auf Brüche von Secunden, oder
ch nur auf Sicherstellung der Secunde ankommt, da darf
türlich diese Mühe als Mittel zum Zwecke nicht gescheut
rden.

Eben so werden wir auch bei der Berechnung der Nor-
ılgleichungen und der Elimination unnöthiges Streben
ch imaginärer Genauigkeit überall zu vermeiden, also
erflüssige Ziffern, die uns die Arbeit ohne reellen Gewinn
r langweiliger machen, in Zeiten wegzurunden haben;
e in unseren obigen Beispielen immer schon gehörigen
ts geschehen ist.

Achtes Kapitel.

Genauigkeit der Functionen bedingter Beobachtungen.

---

§. 74.

Die nach dem Bisherigen ausgeglichenen bedingten
obachtungen werden nun in der Regel gebraucht, um an-
re Gröfsen daraus zu berechnen, welche bekannte Func-
nen von denselben sind. Weil aber, vorausgesetzterma-
n, die Beobachtungen in überschüssiger Anzahl vorhan-
n sind, so wird die zu berechnende Gröfse zunächst nur

als Function von einer gewissen Anzahl der Beobachtungs-
gröfsen erscheinen, mit Ausschlufs der übrigen, welch
aus ersteren berechnet werden könnten; obwohl sie vermi
telst der Ausgleichung wirklich Function von allen Beobach
tungsgröfsen geworden ist. Dies macht es nothwendig
zur Berechnung der Genauigkeit noch andere Hülfsmittel zu
zuziehen, als welche bis jetzt betrachtet wurden.

Sey also die zu berechnende Function u mit einer An
zahl der beobachteten Gröfsen (nicht mit allen) durch di
Gleichung verbunden

$$(16) \qquad u = \psi(O_1;\ O_2;\ O_3 \ldots.)$$

und also scharf berechnet $u = \psi(o_1+v_1;\ o_2+v_2;\ o_3+v_3 \ldots.$
indem wir $o+v$ für O nehmen.

Wenn nun die hier vorkommenden O allein und un
abhängig von einander beobachtet wären, so hätten wir zu
erst daraus nach §. 38. abzuleiten

$$(17) \qquad du = l_1 dO_1 + l_2 dO_2 + l_3 dO_3 +$$

und dann nach n. 29 oder n. 30 zu rechnen, wenn wir den
verschiedene Genauigkeit beilegen müfsten, oder aber nach
n. 31 oder n. 32, wenn die Beobachtungen gleich genau
wären. — Wir wollen hier vor der Hand, zur Erleichte
rung, blofs den letzten Fall betrachten, und hätten also
wenn die Voraussetzung richtig wäre, unmittelbar $m = m_1\sqrt{[l$
oder $\frac{1}{P} = [ll]$ zu berechnen, indem wir die gleichgenauen
Beobachtungen selbst zu Gewichts-Einheiten nähmen. Von
dem ersten Falle reden wir nachher.

Die Voraussetzung ist nun aber nicht richtig. Wir
können also die Gleichung (17) nur gebrauchen, um aus
gegebenen Aenderungen der in ihr vorkommenden O
die entsprechenden Aenderungen des u zu berechnen
dürfen aber nicht mehr die in §. 38. vorgenommene Anwen-

ıng von derselben machen, und das zwar aus dem Grunde
cht, weil die dO nicht unabhängig von einander sind,
ndern durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= a_1 \mathrm{d}O_1 + a_2 \mathrm{d}O_2 + a_3 \mathrm{d}O_3 + a_4 \mathrm{d}O_4 + \ldots \\
0 &= b_1 \mathrm{d}O_1 + b_2 \mathrm{d}O_2 + b_3 \mathrm{d}O_3 + b_4 \mathrm{d}O_4 + \ldots \\
0 &= c_1 \mathrm{d}O_1 + c_2 \mathrm{d}O_2 + c_3 \mathrm{d}O_3 + c_4 \mathrm{d}O_4 + \ldots
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

it den übrigen, in (16) nicht zur Anwendung kommenden
und dO, und also auch unter sich noch in Verbindung
ehen. Diese Gleichungen erhalten wir nämlich dadurch,
ıfs wir durch die Ausgleichung die Bedingungsgleichun-
n n. 43 erfüllt haben, also nun für die v solche Zah-
ı-Werthe besitzen, welche in (11) für die — dO substi-
irt die dφ zu 0 machen. Ueberdies sind bei unserer jetzi-
n Frage nur solche dO zulässig, welche das $[vv]$
ımmtlicher Beobachtungen zu einem Minimum machen.

Um also von dem mittleren Fehler der, einstweilen als
eich genau vorausgesetzten, Beobachtungen auf den mitt-
ren Fehler der Gröfse u schliefsen zu können, dürfen wir
e Gleichungen (16) und (17) gar nicht beibehalten, son-
rn müssen zuerst eine andere Gleichung suchen:

$$u = f(O_1;\ O_2;\ O_3;\ O_4 \ldots), \qquad (19)$$

lche die beiden Eigenschaften hat, dafs alle Beobach-
ngsgröfsen (ausgeglichene Beobachtungen) in ihr vor-
mmen, und dafs sie mit (16) einerlei Werth für u giebt,
nn alle ausgeglichenen Beobachtungen $o+v$ an die Stelle
er O gesetzt werden.

Solcher Gleichungen kann man aber eine unendliche
enge erfinden, denn man braucht zu diesem Ende nur
der Gleichung (16) die Gleichungen (9) zu addiren,
chdem man die letzteren erst mit beliebigen Coeffi-
enten multiplicirt hat. Dadurch erhält man nämlich:

(20) $u = \psi(O_1; O_2; O_3 \ldots) + r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + r_3\varphi_3 + \ldots$

Würde nämlich in dieser Gleichung (welche wir übrigens wie sich gleich zeigen wird, nicht einmal auszuführen brauchen, wenn nur die r ohnedies bestimmt werden können, überall $o+v$ für O geschrieben, so verschwänden alle letzten Glieder vermöge der nach §. 58. und 59. gemachten Arbeiten, und es würde also u ebenso gefunden, wie es nach (16) gefunden werden mufs, die r mögen übrigens noch angenommen werden, wie sie wollen.

Wir werden gleich näher untersuchen, wie man die r dem letzten Zwecke gemäfs, annehmen mufs, bemerken aber hier zuerst, dafs die Gleichung (20) differentiirt uns eine allgemeine Differential-Gleichung von der Form

(21) $du = L_1 dO_1 + L_2 dO_2 + L_3 dO_3 + L_4 dO_4 \ldots$

geben mufs, welche von der Gleichung (17) sich darin unterscheidet, dafs in ihr alle O vorkommen. Können wir also in (21) die L bestimmen, so ist unsere Aufgabe gelöst denn wir brauchten nur nach n. 31 $m = m_1\sqrt{[LL]}$ oder nach n. 32 $\frac{1}{P} = [LL]$ zu berechnen, um den gesuchten mittleren Fehler von u oder sein Gewicht in Beziehung auf die Beobachtungen als Gewichts-Einheit zu haben.

Zur Bestimmung der L haben wir aber durch Differentiation von (20) und Substitution aus (17) und (11) zunächst die Gleichungen:

n. 50.
$$L_1 = l_1 + a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3$$
$$L_2 = l_2 + a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 \text{ u. s. w.}$$
$$L_3 = l_3 + a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3$$
$$L_4 = l_4 + a_4r_1 + b_4r_2 + c_4r_3$$
u. s. w.

und nun kommt es also nur noch darauf an, die r gehörig festzustellen.

Dazu wissen wir aber, dafs nur solche dO zulässig sind, elche specialisirt und also — v gesetzt, das $[vv]$ für alle eobachtungen zu einem Minimum machen. Wir haben so in (21) wieder zu differentiiren, indem wir du als nstant betrachten, und erhalten so, wenn wir die Dif- rential-Gleichung auch gleich specialisiren, indem wir - dd$O$ = dv setzen:

$$(22) \qquad 0 = L_1 dv_1 + L_2 dv_2 + L_3 dv_3 + L_4 dv_4 + \ldots.$$

ergleichen wir diesen Ausdruck mit unserer im §. 59. schon füllten Gleichung

$$(14) \qquad 0 = v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 + v_4 dv_4 \ldots.$$

bemerken wir die wichtige Eigenschaft der L, dafs sie n v proportional seyn müssen, oder mit anderen orten, dafs auch das $[LL]$ ein Minimum werden ufs, und dafs wir also die r so zu bestimmen haben, dafs eses erreicht wird.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir uns nur noch den chtigen Lehrsatz deutlich aussprechen, der in der en bemerkten Eigenschaft unserer L liegt. Dies ist näm- h, weil $[LL] = \frac{1}{P}$ wird, kein anderer als:

> Die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen bewirkt, dafs auch die Genauigkeit aller mit ihrer Hülfe zu berechnenden Gröfsen so grofs als möglich wird.

e Bestimmung der r wird demnach aus n. 50 auf die schon ers, z. B. in den §§. 7, 23 und 42, ausgeführte Weise zu chen seyn. Wir müssen $\left(\frac{d[LL]}{dr_1}\right) = 0$; $\left(\frac{d[LL]}{dr_2}\right) = 0$; $\left(\frac{d[LL]}{dr_3}\right) = 0$ u. s. w. machen, d. h. wir müssen die Glei- ungen

$$
\begin{aligned}
0 &= [aL] \\
0 &= [bL] \\
0 &= [cL]
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

u. s. w.

erfüllen. Substituiren wir nun also in diese letzten Aus drücke die Werthe der L aus n. 50, so erhalten wir end lich zur Bestimmung der r die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= [al] + [aa]r_1 + [ab]r_2 + [ac]r_3 \\
0 &= [bl] + [ab]r_1 + [bb]r_2 + [bc]r_3 \text{ u. s. w.} \\
0 &= [cl] + [ac]r_1 + [bc]r_2 + [cc]r_3
\end{aligned}
\qquad \text{n. 51.}
$$

u. s. w.

Diese Gleichungen, welche wir, um einen kurzen Ausdruc zu haben, Uebertragungs-Gleichungen nennen wol len, sind also mit unseren Normalgleichungen in den Coef ficienten übereinstimmend, und nur in den absoluten Glie dern verschieden. Es sind ihrer nothwendig immer auch z vorhanden; jede mit z_b Gliedern. Wir haben also imme auch so viele r, (die wir Uebertragungs-Coefficien ten nennen wollen,) als Bedingungen zur Ausgleichun dienten. Diese r in n. 50 eingeführt, geben die L.

Endlich ist dann noch zu rechnen:

n. 52. $$m = m_1 \sqrt{[LL]}$$

n. 53. $$\frac{1}{P} = [LL].$$

Die Uebersicht der Geschäfte ist also, sobald die Gleichun (16) gegeben, und u daraus scharf berechnet ist, folgende

1) Differentiire die gegebene Gleichung (16) und bild daraus die l in Zahlen.
2) Bilde aus den l und den Coefficienten der Bedingungs gleichungen die Producte $[al]$; $[bl]$; $[cl]$ u. s. w.
3) Bilde die Uebertragungsgleichungen n. 51 durch

Einführung der eben gebildeten Producten-Summen an die Stelle der absoluten Glieder der Normalgleichungen.

4) Bestimme die Uebertragungs-Coefficienten durch Elimination.

5) Berechne nach n. 50 die L und bilde die Gröfse $[LL]$ durch Quadriren und Addiren.

6) Berechne die Gleichung n. 52 oder n. 53.

s mag noch bemerkt werden, dafs der hier beim fünften eschäfte angegebene Weg zu der Gröfse $[LL]$ zu gelangen ineswegs der einzig mögliche ist. Wir schlagen ihn aber, e bisher in ähnlichen Fällen auch schon geschehen ist, vorgsweise ein, weil er sich an unsere bisherigen Kenntnisse n einfachsten anschliefst.

§. 75.

Zum Rechnungs-Beispiele wollen wir voraustzen, unser Dreieck ABC in dem ersten Beispiele des 63. **Fig. 1.** sey zu dem Zwecke gemessen, um aus der kannten Seite $BC = s = 50000$ Hundertel-Ruthen, die bekannte Seite $AC = u$ zu finden. Wir haben also für e Gleichung (16) hier zu nehmen:

$$u = \frac{s \sin O_2}{\sin O_1},$$

d die ausgeglichenen Winkel

$O_1 = A =$	36°	25′	43″
$O_2 = B =$	90	36	24
$O_3 = C =$	52	57	53
	180	0	0

zuwenden. Hieraus berechnen wir nun, vorausgesetzt, fs alle erforderte Schärfe mit fünfstelligen Logarithmen erreichen steht, zuerst unser u:

$$\begin{aligned} \log s &= 4{,}69897 \\ \log \sin O_2 &= 9{,}99998 \\ C \log \sin O_1 &= 0{,}22635 \\ \log u &= 4{,}92530 \\ u &= 84198 \text{ Hundertel-Ruthen.} \end{aligned}$$

Vermöge des im vorigen §. gelegentlich gewonnenen Lehr satzes wissen wir nun, dafs dieser Werth von u der ge naueste ist, welcher aus den vorhandenen Beobachtunge erlangt werden kann, und dafs es also dabei sein Bewen den hat.

Wollen wir uns aber mit dieser Kenntnifs nicht be gnügen, sondern auch den Grad der Genauigkeit unsere eben berechneten u untersuchen, so berechnen wir nun wei ter nach dem vorigen §. den mittleren Fehler von u.

Differentiiren wir also zuerst unsere Gleichung $u = \frac{s \cdot \sin O}{\sin O_1}$ so kommt uns

$$du = -\frac{u}{\varrho} \cot g\, O_1 dO_1 + \frac{u}{\varrho} \cot g\, O_2 dO_2 .$$

Diese Differential-Gleichung ist nun erst numerisch auszu arbeiten; also haben wir:

$$\log \frac{u}{\varrho} = 9{,}61087$$

$$\begin{aligned} &\log \cot g\, O_1 = 0{,}01392 \quad \log l_1 = 9{,}62479n \quad l_1 = -0{,}42149 \\ &\log \cot g\, O_2 = 8{,}02484n \quad \log l_2 = 7{,}63571n \quad l_2 = -0{,}00432 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad l_3 = 0. \end{aligned}$$

Da hier nur eine Bedingungsgleichung war, in welche $a_1 = a_2 = a_3 = +1$; so ist $[al] = -0{,}425813$. Dem nach haben wir, mit unserer früheren Normalgleichung de §. 63, nun aus n. 51 die Uebertragungs-Gleichung:

$$0 = -0{,}425813 + 3r_1 \text{ d. h. } r_1 = +0{,}141938,$$

und damit nach n. 50

$$L_1 = -0{,}279553$$
$$L_2 = +0{,}137616$$
$$L_3 = +0{,}141938.$$

ırch Quadriren und Addiren erhalten wir hieraus $[LL]$ 0,117234.

Da nun im §. 63. der mittlere Fehler eines Winkels ± 6″,93 gefunden war, so ist $m = \pm 6{,}93\sqrt{0{,}117234}$ ± 2,37 Hundertel Ruthen zu setzen.

Wir wollen diesem leichten Beispiele gleich noch ei-ge Bemerkungen anknüpfen.

1) Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dafs die vor-ehende Rechnung nur bezwecken kann und soll, die Ge-uigkeit auszumitteln, womit die Gröfse u bestimmt ist, enn s als absolut genau betrachtet wird. — Es ist dies i Kleinen hier derselbe Fall, welcher im Grofsen bei je-r Triangulirung vorkommt, wobei die als absolut genau genommene Basis auf die Dreiecksseiten übertragen wird, d nun je nach Zahl und Beschaffenheit der zwischenlie-nden Winkel demungeachtet eine gröfsere oder geringere enauigkeit der berechneten Dreiecksseiten statt findet.

Der hierbei bis jetzt gar nicht berücksichtigte Fehler, r in der Messung der Basis denn etwa auch noch vorge-llen seyn dürfte, pflanzt sich dann bekanntlich, ganz un-hängig von der gegenwärtigen Untersuchung, auf die Sei-n nach Verhältnifs ihrer Gröfse fort; mit anderen Worten: bleibt bei den Seiten dasselbe Fehlerprocent zu fürchten, elches in der Basis zu fürchten ist. Der obige mittlere ehler = 2,37 bleibt aber überdies noch zu fürchten, eil die zur Berechnung nöthigen Winkel mit unvermeidli-nen Fehlern behaftet, und die ausgeglichenen auch noch cht absolut richtig sind.

2) Die Ausgleichung der Winkel hatte nun rücksich
lich der berechneten Dreiecksseiten den Erfolg, dafs d
Genauigkeit der letzteren so grofs als möglich geworden, w
wir uns im vorigen §. theoretisch überzeugt haben. Wolle
wir uns aber von dem durch die Ausgleichung erreichten Ge
winne auch practisch überzeugen, so brauchen wir blofs noc
das $[ll]$ zu berechnen, welches wir, wenn keine überschüs
sige Beobachtung vorhanden und also auch keine Ausglei
chung vorzunehmen gewesen wäre, zur Berechnung der Ge
nauigkeit von u nach §. 38. hätten anwenden müssen.

In unserem Beispiele ist $[ll] = 0{,}177679$. Wir hät
ten also, wenn O_3 nicht gemessen wäre, den Werth vo
$m = \pm 6{,}93\sqrt{0{,}177679} = \pm 2{,}92$ gefunden. Demnach hätt
also in unserem Beispiele die Mitbenutzung des überschüssige
Winkels, zur Ausgleichung der beiden unentbehrlichen, di
Genauigkeit der berechneten Seite um beinahe $\frac{1}{5}$ vermehrt.

Ein ähnliches Uebungs-Beispiel würde die nach §. 6
ausgeglichene Dreiecksverbindung **Fig. 2.** gewähren. Wi
wollen dies aber dem Leser selbst überlassen, da es im We
sentlichen mit dem Obigen übereinstimmt, und nur, wei
mehrere Dreiecke und also auch mehrere Bedingungsglei
chungen darin vorkommen, etwas weitläufiger wird.

3) Es ist wohl kaum nöthig noch ausdrücklich zu be
merken, dafs wir, wenn wir es zur Verdeutlichung noch
nützlich fänden, sehr leicht auch die Zwischenrechnunge
des §. 74. in Zahlen darstellen könnten. Es würde au
diese Weise für unser Beispiel:

$$(20)\quad u = f(O_1; O_2; O_3) = \frac{s \,.\, \sin O_2}{\sin O_1} + r_1 (O_1 + O_2 + O_3 - 180^\circ$$

$$(21)\quad du = -\left(\frac{u}{\varrho} cotg O_1 - r_1\right) dO_1 + \left(\frac{u}{\varrho} cotg O_2 + r_1\right) dO_2 + r_1 dO$$

und also

$$L_1 = -\frac{u}{\varrho} cotg\, O_1 + r_1$$

$$L_2 = +\frac{u}{\varrho} cotg\, O_2 + r_1$$

$$L_3 = \quad + r_1$$

ereinstimmend mit n. 50, und sodann:

3) $[aL] = \frac{u}{\varrho}(cotg\, O_2 - cotg\, O_1) + 3r_1 = [al] + 3r_1$

e es nach n. 51 seyn mufs.

4) Wir haben uns früher überzeugt, wie nützlich es mancher Hinsicht ist, bei Triangulirungs-Aufgaben Richtungs-Verbesserungen statt der Winkel-Verbesserungen in die Ausgleichungs-Rechnungen einzuführen. Wir erden also wohl daran thun, wenn wir auch bei diesen ebertragungen uns gleich darauf einrichten, es eben so zu achen. Dazu brauchen wir nämlich nur unsere O, wenn Winkel bedeuten, als aus zwei Theilen zusammengesetzt betrachten, z. B. $^2_1{}^3 = -\,^2_1 + \,^3_1$; wir müssen dann nur ch die l und L mit solchen doppelten Ziffern versehen. sofern nun blofs Winkel vorkommen, ändert sich dann dem Vorigen gar nichts, als dafs am Ende für das m_1, was en den mittleren Fehler eines Winkels bedeutete, nunehr der mittlere Fehler der Richtungen gesetzt werden ufs. Diesen Fall, der bei Triangulirungen auch alin vorkommt, indem die Basis, wie oben bemerkt, als solut genau angenommen wird, wollen wir bei den folenden Beispielen auch allein zum Grunde legen. — Wenn inkel und Seiten gemessen sind, mufs ohnehin nach §. 8. ne vorläufige Festsetzung über die mittleren Fehler vorsgehen, und braucht dann nur der mittlere Fehler eines inkels mit $\sqrt{2}$ dividirt zu werden, um den mittleren Fehr einer Richtung zu haben und umgekehrt. Bei der weiren Arbeit kommen dann natürlich die erst später vorzutra-

genden Regeln für Beobachtungen von verschiedenen mit leren Fehlern zur Anwendung.

§. 76.

Wir wollen nun die Dreiecks-Verbindung **Fig. 2** nach Maafsgabe der §. 64. gemachten Ausgleichung, zu Grunde legen, und die Seite $\frac{1}{\cdot}\frac{2}{\cdot}$ wieder $= s = 50000$ Hundertel-Ruthen setzen, um daraus die Seite $\frac{4}{\cdot}\frac{5}{\cdot} = u$ zu berechnen. Hier waren die ausgeglichenen Winkel:

$\frac{2}{1}\frac{3}{\cdot} = 36\ 25\ 41{,}72$	$\frac{4}{3}\frac{1}{\cdot} = 50\ 26\ 21{,}43$	$\frac{5}{4}\frac{1}{\cdot} = 70\ 43\ 33{,}72$
$\frac{3}{2}\frac{1}{\cdot} = 90\ 36\ 26{,}58$	$\frac{1}{4}\frac{3}{\cdot} = 87\ 29\ 27{,}93$	$\frac{1}{5}\frac{4}{\cdot} = 56\ 19\ 46{,}58$
$\frac{1}{3}\frac{2}{\cdot} = 52\ 57\ 51{,}72$	$\frac{3}{1}\frac{4}{\cdot} = 42\ 4\ 10{,}64$	$\frac{4}{1}\frac{5}{\cdot} = 52\ 56\ 39{,}72$
$180\ 0\ 0{,}02$	$180\ 0\ 0{,}00$	$180\ 0\ 0{,}02.$

Wir haben also zur weiteren Berechnung des definitiven die Gleichung

$$u = s\frac{\sin\frac{3}{2}\frac{1}{\cdot}\sin\frac{4}{3}\frac{1}{\cdot}\sin\frac{4}{1}\frac{5}{\cdot}}{\sin\frac{1}{3}\frac{2}{\cdot}\sin\frac{1}{4}\frac{3}{\cdot}\sin\frac{1}{5}\frac{4}{\cdot}}.$$

Demnach erhalten wir mit aller Genauigkeit, welche 5 Decimalen gewähren können,

$$\begin{aligned}
\log s &= 4{,}69897 \\
\log\sin\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\cdot} &= 9{,}99998 \\
\log\sin\tfrac{4}{3}\tfrac{1}{\cdot} &= 9{,}88703 \\
\log\sin\tfrac{4}{1}\tfrac{5}{\cdot} &= 9{,}90203 \\
C\log\sin\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{\cdot} &= 0{,}09785 \\
C\log\sin\tfrac{1}{4}\tfrac{3}{\cdot} &= 0{,}00042 \\
C\log\sin\tfrac{1}{5}\tfrac{4}{\cdot} &= 0{,}07975 \\
\log u &= 4{,}66613 \\
u &= 46359 \text{ Hundertel-Ruthen.}
\end{aligned}$$

(Dafs bei Gelegenheit dieser Sin gleich die Cotangenten für d folgende Rechnung aufgeschl gen werden, brauche ich wo für meine Practiker nicht z erinnern.)

Die Differentiation unserer Gleichung giebt nun zuerst ein Gleichung von sechs Gliedern:

$$\begin{aligned}
du = {} & \frac{u}{\varrho}\,cotg\,\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\cdot}\left(-(\tfrac{3}{2})+(\tfrac{1}{2})\right) - \frac{u}{\varrho}\,cotg\,\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{\cdot}\left(-(\tfrac{1}{3})+(\tfrac{2}{3})\right) \\
& + \frac{u}{\varrho}\,cotg\,\tfrac{4}{3}\tfrac{1}{\cdot}\left(-(\tfrac{4}{3})+(\tfrac{1}{3})\right) - \frac{u}{\varrho}\,cotg\,\tfrac{1}{4}\tfrac{3}{\cdot}\left(-(\tfrac{1}{4})+(\tfrac{3}{4})\right) \\
& + \frac{u}{\varrho}\,cotg\,\tfrac{4}{1}\tfrac{5}{\cdot}\left(-(\tfrac{4}{1})+(\tfrac{5}{1})\right) - \frac{u}{\varrho}\,cotg\,\tfrac{1}{5}\tfrac{4}{\cdot}\left(-(\tfrac{1}{5})+(\tfrac{4}{5})\right).
\end{aligned}$$

sen wir diese Glieder nach den beiden Richtungs-Correc-
nen auf und ordnen sie dabei nach den Ziffern der Rich-
igen, um nachher diejenigen bei einander zu bekommen,
zu einerlei Richtung gehören, unterscheiden auch dabei,
in den Zeichen nicht irre zu werden, gleich die Richtun-
n, je nachdem sie links oder rechts liegen, durch die Stel-
ig ihrer Ziffern; so erhalten wir die 12 hier in Betracht
mmenden l, von denen je zwei und zwei nur an Zeichen
rschieden sind, auch zwei (für $\frac{1}{3}$), weil sie derselben Rich-
ig angehören, gleich addirt werden müssen. Diese l
ireiben wir, unter Beifügung derjenigen Richtungen, de-
n $l = 0$ zu setzen sind, zum Behufe der nachherigen Mul-
lications in eine Columne unter einander, und setzen
nen gleich die a; b; c aus den Bedingungsgleichun-
n bei. So haben wir:

für	log	für	log l	l	a	b	c
$\frac{u}{\varrho}$	9,35170	$(\frac{2}{1})$	$-\infty$	0	−1	0	0
$otg\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{1}$	8,02534n	$(\frac{3}{1})$	$-\infty$	$0''_{,}$	+1	−1	0
$otg\,\frac{4}{3}\,\frac{1}{1}$	9,91704	$(\frac{4}{1})$	9,22969n	−0,16970	0	+1	−1
$otg\,\frac{4}{1}\,\frac{5}{1}$	9,87799	$(\frac{5}{1})$	9,22969	+0,16970	0	0	+1
$otg\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{1}$	9,87767n	$(\frac{1}{2})$	7,37704n	−0,00238	+1	0	0
$otg\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{1}$	8,64164n	$(\frac{3}{2})$	7,37704	+0,00238	−1	0	0
$otg\,\frac{1}{5}\,\frac{4}{1}$	9,82358n	$(\frac{1}{3})$	9,26874	+0,35525	−1	+1	0
		$(\frac{1}{3})$	9,22937				
		$(\frac{2}{3})$	9,22937n	−0,16958	+1	0	0
		$(\frac{4}{3})$	9,26874n	−0,18567	0	−1	0
		$(\frac{1}{4})$	7,99334	+0,00985	0	−1	+1
		$(\frac{3}{4})$	7,99334n	−0,00985	0	+1	0
		$(\frac{5}{4})$	$-\infty$	0	0	0	−1
		$(\frac{1}{5})$	9,17528	+0,14972	0	0	−1
		$(\frac{4}{5})$	9,17528n	−0,14972	0	0	+1

Demnach kommt:

für $[al]$	für $[bl]$	für $[cl]$
− 0,00238	− 0,16970	+ 0,16970
− 0,00238	+ 0,35525	+ 0,16970
− 0,35525	+ 0,18567	+ 0,00985
− 0,16958	− 0,00985	− 0,14972
− 0,52959	− 0,00985	− 0,14972
	+ 0,35152	+ 0,04981.

Dies giebt uns nun nach n. 51 und vermittelst unserer obig Normalgleichungen, die Uebertragungsgleichungen:

$$0 = -0{,}52959 + 6r_1 - 2r_2$$
$$0 = +0{,}35152 - 2r_1 + 6r_2 - 2r_3$$
$$0 = +0{,}04981 \quad - 2r_2 + 6r_3.$$

Hieraus erhalten wir durch Elimination die Uebertragung Coefficienten:

$r_1 = +0{,}074580$; $r_2 = -0{,}041056$; $r_3 = -0{,}02198$

Führen wir nun die in n. 50 vorgeschriebenen Multipl cationen und Additionen aus, so erhalten wir die folgend 14 Werthe der L:

für	L	für	L
$\binom{2}{1}$	− 0,0746	$\binom{2}{3}$	− 0,0950
$\binom{3}{1}$	+ 0,1156	$\binom{4}{3}$	− 0,1446
$\binom{4}{1}$	− 0,1888	$\binom{1}{4}$	+ 0,1289
$\binom{5}{1}$	+ 0,1477	$\binom{3}{4}$	− 0,0509
$\binom{1}{2}$	+ 0,0722	$\binom{5}{4}$	+ 0,0220
$\binom{3}{2}$	− 0,0722	$\binom{1}{5}$	+ 0,1717
$\binom{1}{3}$	+ 0,2396	$\binom{4}{5}$	− 0,1717.

Aus diesen Zahlen-Werthen finden wir nun durch Quadri ren und Addiren $[LL] = 0{,}252810$.

Für die gleichgenauen Richtungen hatten wir §. 64

unden $m = \pm 7'',46$; also erhalten wir endlich für unser
las $m = \pm 3{,}75$ Hundertel-Ruthen.

Wollen wir uns nun zuletzt auch noch practisch über-
gen, was wir für die Genauigkeit von u durch unsere Aus-
ichung gewonnen haben, so berechnen wir $[ll]=0{,}292069$.
mit hätten wir erhalten $m = \pm 4{,}03$. Die Genauigkeit
u ist also vermittelst der Mitbenutzung aller Winkel zur
sgleichung der unentbehrlichen um etwa $\frac{1}{14}$ vermehrt.

Wir haben in unseren beiden bisherigen Beispielen die
rmel n. 31 angewandt. Offenbar hätte uns n. 32, wo
$p_1 = 1$ setzen konnten, genau zu demselben Resultate
ührt.

Es scheint nicht nöthig, mehr Beispiele für diese Rech-
ıgs-Weise hier mitzutheilen. Der Leser wird sich deren
den Beispielen des sechsten Kapitels selbst entnehmen,
l jedes noch überdies durch verschiedene Annahmen der
nd u beliebig vervielfältigen können. Bei dem zweiten
ispiele des §. 68. würde etwa zu dem u schicklich der Flä-
ninhalt des Dreieckes genommen werden.

Nur müssen wir auf den besonderen Umstand noch auf-
rksam machen, dafs die a; b; c in unseren beiden Bei-
elen immer 0 oder $+1$ oder -1 wurden, weil wir nur
che wählten, wo blofs Bedingungsgleichungen zweiter
ısse vorkamen. Träten Bedingungsgleichungen dritter
ısse hinzu, wie z. B. der Fall wäre, wenn wir das erste
ispiel des §. 68. **Fig. 9.** für irgend ein s und u auf diese
ise bearbeiteten; so kämen auch noch andere Zahlen-
rthe bei diesen Coefficienten hinzu. Sollten letztere sehr
plicirt werden, so würden wir wohl zweckmäfsig in den
lumnen für a u. s. w. statt der Coefficienten selbst ihre
garithmen schreiben, um damit nach der im §. 20. er-

wähnten und schon öfters bis jetzt angewandten Metho zu rechnen.

§. 77.

Wir wollen nun die im §. 74. einstweilen bei Seite g lassene Voraussetzung, dafs die Beobachtungen verschi dene Genauigkeit hätten, vornehmen, um zu unte suchen, wie sich unser Verfahren darnach zu modifi ren hat.

Hier sehen wir gleich, dafs die Berechnung nach d Formeln n. 29 und 30, nämlich $m = \sqrt{\frac{[ll]}{n}}$ und $\frac{1}{P} = \left[\frac{ll}{p}\right]$ aus denselben, dort angeführten, Gründen nicht stattha ist, dafs wir also durch Bestimmung von Uebertragung Coefficienten, ebenso wie oben am Ende auf n. 50 übergeh und dann $m = \sqrt{\frac{[LL]}{n}}$ oder $\frac{1}{P} = \left[\frac{LL}{p}\right]$ setzen müsse dafs also am Ende nur die Frage bleibt: wie die r in d jetzigen Voraussetzung zu bestimmen seyen?

In dem §. 74. hatten wir nun die specialisirte Differer tialgleichung der Differentialgleichung (21) als

$$(22) \qquad 0 = L_1 dv_1 + L_2 dv_2 + L_3 dv_3 + \ldots$$

erhalten. Diese erhalten wir hier noch fortwährend. Do aber verglichen wir sie mit (14), weil dort $[vv]$ ein Mini mum war. Hier aber müssen wir, weil nicht mehr $[vv]$ sondern $[pvv]$ durch unsere in §. 70. gemachten Arbeite zu einem Minimum gemacht ist, und wir nur unter diese Bedingung unsere $o+v$ für die O setzen durften, sie nich mehr mit (14), sondern mit der in §. 70. erfüllten Glei chung:

$$(15) \qquad 0 = p_1 v_1 dv_1 + p_2 v_2 dv_2 + p_3 v_3 dv_3 + \ldots$$

vergleichen.

Dies zeigt uns nun, dafs die L den pv, also die LL n $ppvv$ und die $\frac{LL}{p}$ den pvv proportional werden müssen, er dafs die r hier so zu bestimmen sind, dafs $\left[\frac{LL}{p}\right]$ ein inimum wird, statt dafs oben $[LL]$ zu einem Minimum macht wurde.

Unseren Zweck zu erreichen müssen wir also die Glei-ungen n. 50 quadriren, die Quadrate mit p dividiren, ad-en, dann die Summe nach den einzelnen r partiell diffe-ntiiren und endlich jeden einzelnen Differential-Quotien-n $= 0$ setzen. Das heifst also, wie wir dies oft bei ähn-hen Gelegenheiten weiter ausgeführt haben, wir müssen e Gleichungen

$$(24) \qquad \begin{aligned} 0 &= \left[\frac{aL}{p}\right] \\ 0 &= \left[\frac{bL}{p}\right] \\ 0 &= \left[\frac{cL}{p}\right] \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

üllen.

Setzen wir aber die Ausdrücke für L nach Maafsgabe r unverändert gebliebenen Gleichungen n. 50 in die Glei-ungen (24), so finden wir die modificirten **Uebertra-ngsgleichungen**

$$54. \qquad \begin{aligned} 0 &= \left[\frac{al}{p}\right] + \left[\frac{aa}{p}\right] r_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] r_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] r_3 \\ 0 &= \left[\frac{bl}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] r_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_3 \text{ u. s. w.} \\ 0 &= \left[\frac{cl}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] r_3 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

d wir haben endlich nach der Elimination und Substitu-n in n. 50:

n. 55. $m = \sqrt{[LL\,mm]}$

n. 56. $\frac{1}{P} = \left[\frac{LL}{p}\right]$.

Die Uebersicht der Geschäfte bleibt dann, vorbehaltlich di ser Modification durch Einführung der Divisoren p, ga dieselbe wie im §. 74., und die Bemerkungen zu jenem sind auch hier zu beachten.

§. 78.

Wir haben nun noch an Rechnungs-Beispiele dieses modificirte Verfahren zu erläutern.

1) In dem zweiten Beispiele des §. 72. hatten wir da ausgeglichene Dreieck unserer **Fig. 1.**

$$\begin{aligned} {}^{2}_{1}{}^{3} &= 36^\circ\,25'\,44'',23 \\ {}^{3}_{2}{}^{1} &= 90\;\;46\;\;22\;,46 \\ {}^{1}_{3}{}^{2} &= 52\;\;57\;\;53\;,31 \\ \hline & 180\;\;0\;\;0\;,00 \end{aligned}$$

erhalten, unter der Voraussetzung, dafs die Richtungen $\frac{2}{1}$ un $\frac{3}{1}$ das Gewicht 4; die Richtungen $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$ das Gewicht 2 und die Richtungen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ das Gewicht 3 gehabt hätten.

Wir wollen nun wieder setzen $\frac{2}{\cdot}\frac{3}{\cdot} = s = 50000$ Hun dertel-Ruthen wäre gegeben und $\frac{1}{\cdot}\frac{3}{\cdot} = u$ wäre daraus z berechnen. Alsdann wäre die Genauigkeit von u zu bestim men. (In ähnlicher Weise wie im §. 75., wo dasselbe Dreiec unter der Voraussetzung gleicher Genauigkeit der Winke benutzt wurde.)

So finden wir jetzt:

$$\begin{aligned} \log s &= 4{,}69897 \\ \log \sin {}^{3}_{2}{}^{1} &= 9{,}99998 \quad \text{also } u = 84196 \text{ Hundertel-Ruthen} \\ C \log \sin {}^{2}_{1}{}^{3} &= 0{,}22634 \\ \log u &= 4{,}92529 \end{aligned}$$

erner haben wir wegen der Differential-Formel:

$$lu = \frac{u}{\varrho} cotg\, {}^{3}_{2}{}^{1}\left(-\left(\tfrac{3}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) - \frac{u}{\varrho} cotg\, {}^{2}_{1}{}^{3}\left(-\left(\tfrac{2}{1}\right)+\left(\tfrac{3}{1}\right)\right)$$

für	log	für	log l	l	a	p	$\frac{al}{p}$
$\frac{u}{\varrho}$	9,61086	$(\frac{2}{1})$	9,62478	+0,42148	−1	4	−0,10537
$cotg\, {}^{3}_{2}{}^{1}$	8,02452n	$(\frac{3}{1})$	9,62478n	−0,42148	+1	4	−0,10537
$cotg\, {}^{2}_{1}{}^{3}$	0,01392n	$(\frac{1}{2})$	7,63538n	−0,00432	+1	2	−0,00216
		$(\frac{3}{2})$	7,63538	+0,00432	−1	2	−0,00216
		$(\frac{1}{3})$	−∞	0	−1	3	0
		$(\frac{2}{3})$	−∞	0	+1	3	0

$$\left[\frac{al}{p}\right] = -0{,}21506.$$

ıch §. 72. haben wir $\left[\frac{aa}{p}\right] = \frac{13}{6}$ also ist die Uebertragungs-leichung nach n. 54:

$$0 = -0{,}21506 + \frac{13}{6} r_{1}$$

d somit $r_{1} = +0{,}09926$. Folglich wird nun nach n. 50

$$L_{1} = +0{,}32222 \qquad \frac{L_1 L_1}{p_1} = 0{,}025958$$

$$L_{2} = -0{,}32222 \qquad \frac{L_2 L_2}{p_2} = 0{,}025958$$

$$L_{3} = +0{,}09494 \qquad \frac{L_3 L_3}{p_3} = 0{,}004507$$

$$L_{4} = -0{,}09494 \qquad \frac{L_4 L_4}{p_4} = 0{,}004507$$

$$L_{5} = -0{,}09926 \qquad \frac{L_5 L_5}{p_5} = 0{,}003284$$

$$L_{6} = +0{,}09926 \qquad \frac{L_6 L_6}{p_6} = 0{,}003284$$

$$0{,}067498 = \frac{1}{P}.$$

Aus dem §. 72. gefundenen mittleren Fehler der Rich-ıgen = 8″,15 berechnet sich also jetzt $m = \pm 2{,}11$ Hun-rtel-Ruthen.

Hätten wir den überschüssigen Winkel nicht gemessen

und also nicht ausgeglichen, so würde $\frac{1}{P} = \left[\frac{ll}{p}\right] = 0{,}0888$ geworden seyn, das Gewicht der Bestimmung von u al nahe im Verhältnisse 4:3 geringer, die Genauigkeit nahe i Verhältnisse 20:17 geringer.

2) Wir wollen nun zuletzt, um die Lehren dieses A schnittes noch einmal in einem Ueberblicke zu durchlaufe das erste Beispiel des §. 68. **Fig. 9.** noch einmal unter e ner anderen Voraussetzung vornehmen. Dort wurde nämli angenommen, dafs alle Richtungen gleich genau bestim seyen. Gesetzt nun aber, die Umstände gestatteten die Annahme nicht. Wir hätten vielmehr zuerst die Station in dem Glauben besucht, dafs 4 sich zu einem Hauptpunk unserer Triangulirung eigne, und deshalb die Richtung $\frac{4}{8}$; $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ mit gleicher Genauigkeit scharf festgelegt. Wäh rend wir aber nun auf der Station 2 im Begriffe gewesen wä ren, eben so zu verfahren, hätten wir aus dem Berichte e nes recognoscirenden Gehülfen ersehen, dafs statt des Punk tes 4 besser ein anderer Punkt substituirt werde, und hätt also $\frac{4}{2}$ schon mit einer geringeren Beobachtungszahl festg legt, endlich $\frac{4}{1}$, da nun auch noch vielleicht fremde Hinde nisse dazu gekommen, mit noch geringerer Sorgfalt. – Nun müfsten wir also zuerst das Gewicht der Beobachtun gen $\frac{4}{2}$ und $\frac{4}{1}$ schätzen. Gesetzt wir hätten ersteres Gewich $= \frac{1}{2}$ und letzteres $= \frac{1}{3}$ gefunden, wenn wir alle übrige Richtungen als gleich genau betrachten und ihr Gewich $= 1$ setzen.

Wir wollen nun in diesem letzten Beispiele auch noc die Bedingungsgleichungen auf's Neue vornehmen, die Co rectionen in Secunden ausgedrückt denken und scharf mit Decimalen rechnen, wie man es in der wirklichen Prax

mer thun mufs, wenn es auf Feststellung der einzelnen ecunden ankommt.

Die Rechnung für die zweite Bedingungsgleichung giebt it den *Vega'schen* Tafeln:

9,6652217 — 40,35 $(\frac{4}{2})$ + 40,35 $(\frac{1}{2})$	9,9980768 + 2,00 $(\frac{2}{1})$ — 2,00 $(\frac{4}{1})$
9,9863442 — 5,36 $(\frac{4}{3})$ + 5,36 $(\frac{2}{3})$	9,9058627 — 15,51 $(\frac{3}{2})$ + 15,51 $(\frac{4}{2})$
9,8696865 — 19,10 $(\frac{3}{1})$ + 19,10 $(\frac{4}{1})$	9,6173802 — 46,26 $(\frac{4}{3})$ + 46,26 $(\frac{1}{3})$
9,5212524	9,5213197

nsere beiden Bedingungsgleichungen sind also:

$$0 = -12'' - (\tfrac{2}{1}) + (\tfrac{3}{1}) + (\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{3}{2}) - (\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{3})$$

$$\begin{aligned} 0 = +673 &+ 2{,}00\,(\tfrac{2}{1}) - 40{,}35\,(\tfrac{1}{2}) + 46{,}26\,(\tfrac{1}{3}) \\ &+ 19{,}10\,(\tfrac{3}{1}) - 15{,}51\,(\tfrac{3}{2}) - 5{,}36\,(\tfrac{2}{3}) \\ &- 21{,}10\,(\tfrac{4}{1}) + 55{,}86\,(\tfrac{4}{2}) - 40{,}90\,(\tfrac{4}{3}). \end{aligned}$$

ir sehen hier gleich, wie das absolute Glied der zweiten edingungsgleichung im §. 68. durch die Rechnung mit 5 ecimalen um mehr als eine Einheit unzuverlässig gewor- n ist, zur Bestätigung unserer Regel, bei ernstlicher An- endung dieses mit 7 Decimalen zu rechnen. Ueberdies merken wir, dafs wir die Coefficienten nun hier gelegent- h auch viel schärfer erhalten, als wir sie eigentlich brau- en, weil wir bei den folgenden Rechnungen doch gleich zu n 5 Decimalen zurückkehren. Dies letzte ist aber kein erlust, eben weil wir die Coefficienten gelegentlich mit halten, und das Ueberflüssige hernach wieder wegrunden nnen.

Die Correlatengleichungen werden nun nach 47, weil $\frac{4}{2}$ das Gewicht $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{1}$ das Gewicht $\frac{1}{3}$ hat:

$0 = -\kappa_I + 2{,}00\,\kappa_2$	$(\frac{1}{2}) = +\kappa_I - 40{,}35\,\kappa_2$	$(\frac{1}{3}) = -\kappa_I + 46{,}26\,\kappa_2$
$= +\kappa_I + 19{,}10\,\kappa_2$	$(\frac{3}{2}) = -\kappa_I - 15{,}51\,\kappa_2$	$(\frac{2}{3}) = +\kappa_I - 5{,}36\,\kappa_2$
$0 = -63{,}30\,\kappa_2$	$(\frac{4}{2}) = +111{,}72\,\kappa_2$	$(\frac{4}{3}) = -40{,}90\,\kappa_2$

Die Normalgleichungen werden also nach n. 48 it Wegrundung der Decimalen:

$$0 = -12 + 6\kappa_1 - 59\kappa_2 \quad \text{Hieraus} \quad \kappa_1 = +1{,}582594$$
$$0 = +673 - 59\kappa_1 + 13655\kappa_2 \qquad \kappa_2 = -0{,}042448$$

Dies giebt nun die Verbesserungen:

$$\binom{2}{1} = -1{,}667 \quad \binom{1}{2} = +3{,}295 \quad \binom{1}{3} = -3{,}546$$
$$\binom{3}{1} = +0{,}772 \quad \binom{3}{2} = -0{,}924 \quad \binom{2}{3} = +1{,}810$$
$$\binom{4}{1} = +2{,}687 \quad \binom{4}{2} = -4{,}742 \quad \binom{4}{3} = +1{,}736$$

oder bequemer:

$$\binom{2}{1} = 0 \quad \binom{1}{2} = +4{,}22 \quad \binom{1}{3} = -5{,}28$$
$$\binom{3}{1} = +2{,}44 \quad \binom{3}{2} = 0 \quad \binom{2}{3} = +0{,}07$$
$$\binom{4}{1} = +4{,}35 \quad \binom{4}{2} = -3{,}82 \quad \binom{4}{3} = 0.$$

Daraus folgen die

Ausgeglichenen Azimuthe:

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2. A	3. A	4. A
3. A + 47° 35′ 28″,44	4. A + 53° 37′ 16″,18	1. A + 24° 28′ 39″,72
4. A + 95 23 21 ,35	1. A + 81 10 46 ,22	2. A + 75 42 25 ,07

Die Probe steht dann so:

47 35 28,44	9,6652541	9,9980759
81 10 46,22	9,9863442	9,9058568
51 13 45,35	9,8696902	9,6173558
180 0 0,01	9,5212885	9,5212885

Wir wollen nun setzen, es würde bei unseren ferneren Arbeiten der Winkel $\binom{1}{4}^{2} = u$ gebraucht; so berechneten wir ihn ohne Weiteres nach der Formel:

$$u = 180^\circ - {}^{2}_{1}{}^{4} - {}^{4}_{2}{}^{1} = 57^\circ\, 3'\, 8{,}''61$$

und dies ist dann überhaupt der genaueste Werth, der sich für ihn aus unseren sämmtlichen Beobachtungen erhalten läfst.

Wollen wir nun aber auch den Fehler wissen, den wir in diesem Winkel zu befürchten haben, so differentiiren wir

ist die Gleichung, wornach u berechnet ist, und machen nun die Uebertragung. So erhalten wir zunächst:

$$du = +\binom{2}{1} - \binom{4}{1} - \binom{1}{2} + \binom{4}{2}$$

und sodann

für	l	a	b	p	$\frac{al}{p}$	$\frac{bl}{p}$
$\binom{2}{1}$	+1	−1	+ 2,00	1	−1	+ 2,00
$\binom{3}{1}$	0	+1	+19,10	1	0	0
$\binom{4}{1}$	−1	0	−21,10	$\frac{1}{3}$	0	+ 63,30
$\binom{1}{2}$	−1	+1	−40,35	1	−1	+ 40,35
$\binom{3}{2}$	0	−1	−15,51	1	0	0
$\binom{4}{2}$	+1	0	+55,86	$\frac{1}{2}$	0	+111,72
$\binom{1}{3}$	0	−1	+46,26	1	0	0
$\binom{2}{3}$	0	+1	− 5,36	1	0	0
$\binom{4}{3}$	0	0	−40,90	1	0	0.

Hieraus also $\left[\frac{al}{p}\right] = -2$; $\left[\frac{bl}{p}\right] = +217{,}37$.

un haben wir nach n. 54 die Uebertragungsgleichungen:

$$0 = -2{,}00 + 6r_1 - 59r_2$$
$$0 = +217{,}37 - 59r_1 + 13655r_2.$$

araus kommt

$$r_1 = +0{,}18464; \quad r_2 = -0{,}015121.$$

emnach nach n. 50:

	ar_1	br_2	L	$\frac{LL}{p}$
)	− 0,18464	− 0,03024	+ 0,78512	0,616400
)	+ 0,18464	− 0,28881	− 0,10317	0,010644
)	0	+ 0,31905	− 0,68095	1,391100
)	+ 0,18464	+ 0,61013	− 0,20523	0,042119
)	− 0,18464	+ 0,23453	+ 0,04989	0,002489
)	0	− 0,84466	+ 0,15534	0,048260
)	− 0,18464	− 0,69950	− 0,88414	0,781700
)	+ 0,18464	+ 0,08105	+ 0,26569	0,070590
)	0	+ 0,61845	+ 0,61845	0,382482
				3,345784 = $\frac{1}{P}$

Wäre nun z. B. bei unseren Messungen der mittlere Fehler einer Haupt-Richtung, welcher wir das Gewicht 1 zuschreiben, $= 4''$ gewesen, so hätten wir in dem berechneten Winkel u einen Fehler $= 7'',52$ zu fürchten.

Wären blofs die 4 Richtungen beobachtet gewesen welche zur Bestimmung des Winkels u absolut nöthig waren, so hätte $\left[\frac{ll}{p}\right] = 7$ einen mehr als $\frac{10}{7}$ mal so grofsen Fehler befürchten lassen.

Diese Beispiele werden genügen, um den Leser in den Stand zu setzen sich bei den verhältnifsmäfsig seltener vorkommenden Fällen, wo eine Genauigkeits-Berechnung für eine Function ausgeglichener bedingter Beobachtungen nöthig ist, selbst zurecht zu finden.

Wir haben nun uns noch über das Ansetzen der Bedingungsgleichungen vorbehaltenermaafsen zu verständigen.

Vierter Abschnitt.

nsatz der Bedingungsgleichungen bei bedingten Beobachtungen.

Neuntes Kapitel.

Vorbereitungen für den Ansatz.

§. 79.

Wir haben schon oben §. 60. das Geschäft, was wir in m gegenwärtigen Abschnitte abhandeln wollen, mit dem ısatze algebraischer Aufgaben verglichen, die wir leicht srechnen können, wenn sie nur erst angesetzt sind. Diese hnlichkeit zeigt sich nun auch darin, dafs wir hier wie rt nicht im Stande sind, so specielle Ansatz-Regeln zu ben, dafs sich jeder individuelle Fall ohne weiteres Nachnken darunter begreifen liefse. Wir sind im Gegentheile r wie dort darauf angewiesen, nur die allgemeinen Prinıien gehörig aufzufassen, nach denen immer zu verfahı ist, und müssen dann im einzelnen Falle erst nachsehen, e diese sich nach den besonderen Umständen anwenden sen. — Diese Anwendung kann dann bald leichter, bald ıwerer, bald auf eine, bald auf verschiedene Weise auszu-

führen seyn; immer bleibt es Sache des Nachdenkens u
der Uebung, die zweckmäfsigste schnell zu finden.

Wir werden also in diesem ganzen Abschnitte unser
Zweck für erreicht halten müssen, wenn wir jene allgeme
nen Principien aufstellen und ihre Anwendung auf die in d
practischen Geometrie am gewöhnlichsten vorkommend
Fälle nachweisen.

Drei Fragen sind es nun, die wir uns bei jeder Au
gleichungs-Aufgabe dieser Art zu beantworten haben:

1) Wie grofs ist die Anzahl der von einander unab
hängigen Bedingungen, die zwischen den beobachteten Gr
fsen statt finden? und falls etwa die Bedingungen verschi
dener Gattung seyn sollten, (erster, zweiter, dritter Klass
wie viele jeder einzelnen Gattung giebt es?

2) Wie haben wir, wenn die Anzahl bekannt ist, d
einzelnen unabhängigen Bedingungen aufzusuchen un
sofern es thunlich ist, in Gleichungen darzustelle
Falls dieses letzte etwa auf verschiedene Weise geschehe
kann, welche ist die zweckmäfsigste?

3) Wie können wir die uns immer nothwendigen B
dingungsgleichungen, aus welchen wir nach den i
vorigen Abschnitte vorgetragenen Regeln dann alles übrig
finden müssen, in numerischen Ausdrücken am zweck
mäfsigsten aus den bekannten einzelnen Bedingungen en
wickeln?

Diese drei Fragen beantworten sich nun theilweise ver
schieden, je nachdem die vorliegenden Beobachtungen en
weder:

1) blofs Winkel-Messungen sind, oder
2) blofs Linien-Messungen, oder
3) Winkel- und Linien-Messungen gemischt.

Wir wollen also, um in unseren Betrachtungen Ordnung zu hal

n und in der Praxis für jeden vorkommenden Fall gleich die auptregeln beisammen zu haben, in diesem Abschnitte dem- ichst wieder drei Kapitel machen und zwar nach der letzter- ähnten Verschiedenheit der zu bearbeitenden Beobachtungen, n in jedem derselben die drei Fragen nach der Reihe vor- nehmen, immer in der Voraussetzung, dafs unsere Beobach- ngen sich auf ebene horizontale Figuren beziehen, worauf r bekanntlich die sphärischen und sphäroidischen, die uns der Praxis vorkommen, immer reduciren können. (Nur legentlich wollen wir einige Bemerkungen über die Fälle ifügen, wo Höhen-Messungen mit den Horizontal-Mes- ngen verbunden sind).

Das gegenwärtige Kapitel hat aber den Zweck, die- nigen Umstände zur Sprache zu bringen, die für alle drei älle gelten, und bei welchen wir uns dann späterhin nur erher zu beziehen brauchen.

§. 80.

Was zuerst die Frage nach der Anzahl der zu er- illenden von einander unabhängigen Bedingungen und also ich der Bedingungsgleichungen betrifft, so ist sie viel wich- ger, als sie auf den ersten Blick scheinen möchte; denn sie ufs uns den ersten Anhalt gewähren, um letztere aufzu- nden. Es leuchtet zwar ein, dafs jede besondere Aufgabe, ei welcher überschüssige Beobachtungen vorliegen, eine anz bestimmte Anzahl von Bedingungen haben mufs, a nothwendig in ihr eine bestimmte Anzahl von Beobach- ngen vorkommen, die als überflüssig betrachtet werden önnen. Weil aber solche Beobachtungen in der Regel sich icht von selbst als überschüssig ankündigen, so gerathen ir leicht in die Gefahr Irrthümer zu begehen, wenn wir ie Anzahl nicht zum Voraus ausgemittelt haben.

Dieses durch leichte Beispiele erst zu erläutern, wolle wir setzen:

1) Es seyen wie im §. 68. 2) in einem Dreiecke AB **Fig. 10.** alle Seiten und alle Winkel gemessen. — Da hier nur eine Bedingungsgleichung zweiter Klasse sta findet, leuchtet uns gleich ein, weil wir hier die einfachst aller Figuren vor uns haben, deren Winkelsumme wir vo jeher kennen. Wir haben also als erste Bedingung:

$$0 = A + B + C - 180^\circ.$$

Nun wird es uns gleich einfallen, dafs

$$a \sin B = b \sin A$$

seyn mufs. Wollten wir nun aber gleich dies als einzige Be dingung dritter Klasse ansetzen, und mit den zwei Glei chungen die Rechnung nach dem Obigen ausführen, s würden wir finden, dafs am Ende c noch einen Widerspruc gäbe.

Nähmen wir aber nun, nach Entdeckung unsere Fehlers, die beiden übrigen noch stattfindenden Glei chungen

$$a \sin C = c \sin A$$
$$b \sin C = c \sin B$$

als Bedingungen hinzu, und rechneten nun unser Exempe mit diesen vier Gleichungen zu Ende; so würden wir zu letzt Normalgleichungen erhalten, aus denen sich die Cor relaten nicht finden liefsen, weil sie auf eine identische Glei chung führten.

Diesen ungeschickten Misgriffen hätten wir nun abe vorgebeugt, wenn wir uns von vorn herein klar gemacht hät ten, dafs aufser der einen Bedingung zweiter Klasse, zwe Bedingungen dritter Klasse, nicht mehr und nicht weniger bestehen müssen, also in Allem die bestimmte Anzahl vor

rei Bedingungsgleichungen vorkommen mufs. Dieses lgt nämlich nothwendig daraus, dafs drei überschüssige ücke gemessen sind.

Erfüllten wir also irrigerweise aufser der Bedingung veiter Klasse nur noch die eine Bedingung dritter Klasse $\sin B = b \sin A$, so veränderten wir unsere Beobachngen nur insofern, dafs unsere fehlerhafte Linien-Verndung **Fig. 10.** in die Linien-Verbindung **Fig. 11.** ergieng, bei welcher die von C auf c gefällten Perpenkel gleich lang sind; ohne dafs jedoch C ein und derselbe nkt ist. Soll letzteres nun auch noch der Fall seyn, so üssen wir auch noch machen, dafs die beiden Werthe für s von B gefällte Perpendikel, welche wir aus $a \sin C$ und $\sin A$ berechnen, gleich grofs werden.

Den zweiten Irrthum, bei welchem wir auch noch die itte Gleichung $b \sin C = c \sin B$ als Bedingung und also sammen vier Bedingungen aufzustellen unternahmen, hätn wir vermieden, wenn wir erwogen hätten, dafs diese leichung sich aus den beiden vorhergehenden unmittelbar giebt durch Elimination von a und A, dafs sie also nicht ehr als selbständige unabhängige Bedingung aufgestellt erden kann. Mit anderen Worten, wir hätten darauf auferksam seyn sollen, dafs wenn die Linien-Verbindung **ig. 11.** in das geschlossene berichtigte Dreieck **Fig. 10.** ergegangen ist, die Gleichheit der beiden berechneten erthe für das von A gefällte Perpendikel nunmehr eine thwendige Eigenschaft des geschlossenen Dreieckes, inesweges aber eine noch weiter zu erfüllende Bedinung ist.

2) Wenn in dem Vierecke **Fig. 9.** in allen 4 Punkn alle Winkel beobachtet wären, so scheint es auf den rsten Blick, als hätten wir 4 Bedingungsgleichungen zwei-

ter Klasse zu erfüllen, weil die 4 Dreiecke auf 180° schli
ſsen müssen. Das ist aber nicht richtig; denn wenn 3 b
liebige von diesen Dreiecken schliefsen, so folgt darau
dafs das vierte auch schliefsen mufs. Wir hätten also n
drei Bedingungsgleichungen zweiter Klasse zu erfüllen.

Rücksichtlich auf die Bedingungen dritter Klasse b
gnügten wir uns §. 68. mit der Gleichung:

$$\frac{4.1}{4.2} \cdot \frac{4.2}{4.3} \cdot \frac{4.3}{4.1} = 1.$$

Wir sehen nun leicht, dafs es aufser dieser Gleichung noc
drei andere Gleichungen von derselben Form geben muſ
indem wir statt 4 einen anderen Punkt nehmen, also z. B.

$$\frac{3.1}{3.2} \cdot \frac{3.2}{3.4} \cdot \frac{3.4}{3.1} = 1;$$

ja dafs wir auch eine Gleichung, die alle vier Seiten en
hält, aufstellen können, nämlich:

$$\frac{1.2}{2.3} \cdot \frac{2.3}{3.4} \cdot \frac{3.4}{4.1} \cdot \frac{4.1}{1.2} = 1.$$

Wenn wir also uns zuerst mit diesen Gegenständen beschäf
tigen, so können wir vielleicht in den Irrthum gerathen, da
wir aufser jener ersten obigen Gleichung noch eine oder meh
rere der übrigen als Bedingungen aufzustellen hätten. —
Dieser Irrthum wird aber unmöglich, wenn wir uns von vor
herein überzeugt haben, (wozu im Folgenden die Mittel ge
geben werden sollen,) dafs überhaupt nur eine Bedin
gung dritter Klasse in diesem Falle existirt, woraus
denn folgt, dafs alle anderen Gleichungen der Art, die wi
etwa bilden mögen, nur Folgerungen aus jener einen, ode
Eigenschaften der durch Erfüllung der einen berichtigte
Figur sind.

Diese Beispiele werden wohl genügen, um den Zweck

d die Bedeutung unserer ersten Frage in das Licht zu se-
en. Ihre Beantwortung lernen wir demnächst finden.

§. 81.

Was nun die zweite Frage betrifft, so haben wir schon
en angemerkt, dafs es immer nothwendig ist, die als
erschüssig erkannten oder gewählten Gröfsen einzeln aus
en übrigen scharf zu berechnen, oder eine andere, jene
rtretende, scharfe Rechnung zu machen, um die Wider-
rüche, deren Anzahl also nach dem Vorigen feststeht, in
hlen auszudrücken. Diese Berechnung kann nun entwe-
r durch geschlossene endliche Gleichungen geschehen, der-
eichen wir im §. 58. vorläufig mit (9) bezeichneten; oder
er die Entwickelung solcher Gleichungen hat practische
hwierigkeiten. In beiden Fällen haben wir vor allem
rge zu tragen, dafs jede Berechnung der Art von den
rigen unabhängig sey; also, wenn wir die Bedingun-
n in Gleichungen darstellen können, dafs wir keine solche
eichung aufnehmen, die sich aus einer der übrigen oder
hreren derselben allein ableiten läfst. — Wir errei-
en diesen Zweck im Allgemeinen immer sicher, wenn
r von den vorgegebenen Gröfsen so viele, als wir wissen,
fs überschüssige vorhanden sind, erst ganz weglassen, und
nun mit ausschliefslicher Zugrundelegung der übrigen, die
r als Elemente der überschüssigen betrachten, nach und
ch einzeln zu berechnen unternehmen. Offenbar aber
bt die Willkühr, die wir darin haben, eine gegebene An-
hl unserer Beobachtungen auszuwählen, um sie für über-
üssig zu erklären, uns dann jedesmal Gelegenheit dar-
er erst nachzudenken, wie wir diese Wahl am zweckmä-
gsten einrichten. Allgemeine Regeln werden sich schwer-

lich darüber je geben lassen. Wir begnügen uns, die Re geln für die einzelnen practischen Fälle aufzustellen.

Auch das hier Bemerkte wollen wir durch ein Beispi erläutern.

Nehmen wir wieder unser Dreieck **Fig. 10.** vor, s sehen wir rücksichtlich der Bedingung zweiter Klass dafs wir jeden Winkel auf gleiche Weise aus den übrige berechnen können, und dafs also die Gleichung

$$0 = A + B + C - 180^\circ$$

allen Anforderungen genügt.

Nun wissen wir aber nach §. 80., dafs noch zwei Be dingungen dritter Klasse bestehen. Um sie aufzusuche und darzustellen, können wir also:

1) zwei von den Seiten als überschüssig betrachte Wählen wir dazu nun b und c, betrachten also a und zw Winkel als Elemente, woraus b und c zu berechnen sin so haben wir auf der Stelle die beiden Bedingungen in de Gleichungen dargestellt

$$a \sin B = b \sin A$$
$$a \sin C = c \sin A,$$

worin wir auch einen der Winkel durch die beiden übrige vermöge der ersten Bedingung ausgedrückt, also z. B. $\sin$ $= \sin (A + B)$ gesetzt denken können. Wir hätten abe eben so gut eine dieser beiden Gleichungen weglassen un statt ihrer die dritte

$$b \sin C = c \sin B$$

nehmen können, nur dürfen wir nicht die dritte mit und ne ben den beiden übrigen als Bedingung aufstellen wollen, wi wir oben gesehen haben.

2) Wollen wir eine Seite und einen Winkel als über schüssig betrachten, so könnten wir dazu nun z. B. b und B

ählen, um sie aus a, c, A zu berechnen. Wir hätten so die beiden Bedingungen zunächst in den Gleichungen

$$a \sin B = b \sin A$$
$$b \sin (A + B) = c \sin B$$

sgesprochen und somit im Grunde nur eine Wiederholung r Annahme unter 1), wie vorauszusehen war.

3) Betrachten wir aber a und B als überschüssig, so ssen sich unsere beiden Bedingungen in den Gleichungen rstellen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$\cot g B + \cot g A = \frac{c}{b \sin A}.$$

4) Wollten wir die beiden Winkel B und A durch die Seiten dargestellt denken, so hätten wir wieder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

s Ausdruck der beiden zu erfüllenden Bedingungen dritter lasse.

Da wir nun noch ganz freie Wahl haben, so halten wir s vorerst an die einfachsten Ausdrücke, leiten also unsere dingungsgleichungen aus zwei von den unter 1) aufgeührten Gleichungen ab, wie wir es im §. 68. auch wirklich non gemacht haben.

Wenn wir aber nun auch hier dazu gekommen sind, die dingungen in geschlossenen Gleichungen aufzufinden, lche die Erreichung des Zweckes sicher voraussehen las-n; so können wir immer noch eine Wahl treffen über die rm, in welcher wir sie darstellen wollen, und gewöhnlich haben wir auch noch eine Ueberlegung anzustel-n, welche von mehreren solchen Gleichungen unserem jesmaligen Zwecke am Besten entspricht.

In unserem Beispiele würden wir also die For
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ vorziehen, weil wir, wie oben §. 6
nachgewiesen ist, damit auf sehr leichte Weise die Coe
ficienten der Bedingungsgleichungen gleich bei der Berech
nung der Widersprüche mit erhalten können. Es blei
uns aber dann, eben nach dem Obigen, immer noch d
Wahl, ob wir am Ende

$$log\left(\frac{a}{\sin A}\right) - log\left(\frac{b}{\sin B}\right) = 0 \text{ und } log\left(\frac{a}{\sin A}\right) - log\left(\frac{c}{\sin C}\right) =$$

oder

$$log\left(\frac{a}{\sin A}\right) - log\left(\frac{b}{\sin B}\right) = 0 \text{ und } log\left(\frac{b}{\sin B}\right) - log\left(\frac{c}{\sin C}\right) =$$

oder

$$log\left(\frac{a}{\sin A}\right) - log\left(\frac{c}{\sin C}\right) = 0 \text{ und } log\left(\frac{b}{\sin B}\right) - log\left(\frac{c}{\sin C}\right) =$$

benutzen sollen. In solchen Fällen wählen wir dann a
liebsten diejenige Combination, welche die Widersprüch
und also auch die Coefficienten der Bedingungsgleichunge
in den gröfsten Zahlen darstellt, weil wir damit etwas
Sicherheit der Rechnung gewinnen.

Es ist aber für die Darstellung der Bedingungen keine
wegs nöthig, dafs wir gerade die Gleichungen, in welche
dieselben aufgefunden sind, unmittelbar beibehalten. W
können unter Umständen auch erst Combinationen oder Um
formungen mit ihnen vornehmen, vorausgesetzt nur imme
dafs die Unabhängigkeit gewahrt bleibe.

Hätten wir so etwa in unserem Beispiele die erste d
unter 1) aufgefundenen Bedingungen, deren geometrisch
Bedeutung in **Fig. 11.** nachgewiesen ist, beizubehalte
beschlossen, und wären nun verlegen gewesen, welche vo
den beiden anderen Gleichungen wir als Bedingung hinz
nehmen sollten, so hätten wir wohl, in Erinnerung an ein
bekannte practische Regel, uns veranlafst sehen könne

einen von beiden zu wählen, sondern einen Mittelweg inzuschlagen, d. h. eine neue Gleichung aus der Combination der beiden anderen zu suchen. Setzen wir sie also zurst in die Form

$$a \sin(A+B) = c \sin A$$
$$b \sin(A+B) = c \sin B,$$

ultipliciren oben mit $\cos B$, unten mit $\cos A$ und addiren, o kommt

$$a \cos B + b \cos A = c$$

ne Gleichung, die sich auch schon in **Fig. 11.** unmittelar als geometrisch nothwendig darstellt.

Diese letzte Darstellung würden wir etwa gewählt haen, wenn es darauf ankäme, einem Anfänger recht augenheinlich zu machen, dafs drei und nur drei unabhängige Bedingungen:

$$C = 180^\circ - A - B$$
$$a \sin B = b \sin A$$
$$c = a \cos B + b \cos A$$

unseren dermaligen Beobachtungen nothwendig liegen, afs also für die aufzufindenden v jedenfalls drei Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, und nur Acht zu geben t, dafs keine unabhängige weggelassen, keine überflüssige ler von den anderen abhängige aufgenommen werde.

Das vorige Beispiel war vorzugsweise auf den Fall einerichtet, wo wir die Bedingungen bequem und übersichtch in geschlossenen endlichen Gleichungen ausdrücken onnten. In den Fällen, wo dies nicht angeht, werden ir aber in der Regel mit Hülfe einer Figur leicht diejenigen s überflüssig erst wegzulassenden und dann nach und nach harf zu berechnenden Stücke finden können, bei welchen ie Widersprüche sich in den gröfsten Zahlen aussprechen

müssen (gleichsam die empfindlichsten Theile der Figur) und wenn uns dann noch eine Wahl bleibt, werden wir diejenigen Stücke vorziehen, bei welchen die scharfe Berechnung sich am leichtesten ausführen läfst.

§. 82.

Wenn nun die Anzahl der Bedingungen ausgemittelt ist, und die Bedingungen selbst aufgesucht und wo möglich in Gleichungen dargestellt, auch die Widersprüche schar berechnet sind; so kommt es noch darauf an, die Bedingungsgleichungen in der n. 43 angegebenen Form numerisch anzusetzen, d. h. also mit anderen Worten die numerischen Werthe der partiellen Differential-Quotienten a, b, c zu finden, welche die Coefficienten der Bedingungsgleichungen bilden.

Wir haben schon oben §. 60. angemerkt, dafs wir, wenn dieses Geschäft nach irgend einer beliebigen Methode verrichtet ist, dann die weitere Rechnung immer auf dieselbe Weise zu Ende führen können. In jedem besonderen practischen Falle werden wir uns aber die Frage vorlegen, welche Ansatz-Methode die zweckmäfsigste sey? Wir wollen hier also die drei Methoden im Allgemeinen merken, zwischen denen uns in jedem besonderen Falle die Wahl bleibt und von denen wir alsdann diejenige zu wählen haben, die uns jedesmal am wenigsten Zeit und Bemühung kostet.

Erste Methode.

Wenn die Bedingungen in endlichen Gleichungen dargestellt sind, und diese Gleichungen sich bequem differentiiren lassen, so können wir sie gleich benutzen, um durch Differentiation und Substitution der Zahlenwerthe, die wir aus den Beobachtungen entnehmen, zu den verlangten Coefficienten zu gelangen.

Wir haben diese Methode in §. 58. bereits unserer Ab-
itung zum Grunde gelegt, bemerken auch, dafs bei der
ractischen Ausführung eben so zu verfahren ist wie z. B.
44., wo auch zum Behufe der dortigen Bedingungsglei-
ungen differentiirt und substituirt wurde; brauchen uns
so hier nicht weiter dabei aufzuhalten.

Zweite Methode.

Wenn die Bedingungen so dargestellt sind, dafs sich
e Widersprüche bequem logarithmisch berechnen lassen, so
afs wir am Ende für jede Bedingung zwei Logarithmen
rgleichen, die bei fehlerfreien Beobachtungen gleich seyn
üfsten, so benutzen wir die während der Rechnung uns
nehin vorkommenden logarithmischen Differenzen um den
n Ende zu vergleichenden Logarithmen gleich die Aende-
ngen beizufügen, welche sie durch Aenderung der Be-
achtungsgröfsen erleiden würden, und die dann also aus
nem numerischen Coefficienten, verbunden mit dem betref-
nden v, bestehen.

Von dieser Methode sind in dem vorigen Abschnitte
hon vielfältige Beispiele vorgekommen, nach deren Ana-
gie wir uns in practischen Fällen richten können. Nur ei-
es Umstandes wollen wir noch Erwähnung thun, der uns
unseren Beispielen noch nicht vorgekommen ist. Es
nn nämlich der Fall seyn, dafs wir den Logarithmus ei-
r Gröfse mit seinen Aenderungen bequem auffinden, zur
ergleichung aber nicht einen zweiten Ausdruck dessel-
n Logarithmus, sondern die Zahl dafür haben, wie z. B.
unserem vorigen §. der Fall seyn würde, wenn wir aus
$= \frac{b \sin A}{\sin B}$ berechnet hätten: $log\, a = \lambda + a_1 db + a_2 dA + a_3 dB$
nd dies nun mit dem unmittelbar gemessenen a vergleichen

sollten. In solchen Fällen werden wir also zu erwägen h
ben, ob es vortheilhafter ist, der logarithmischen Rechnu
gleichsam auf halbem Wege entgegen zu kommen und v
der anderweit bekannten Zahl (in unserem Beispiele v
dem gemessenen a) den Logarithmus aufzuschlagen, od
ob wir, in ähnlicher Weise wie §. 39. geschah, aus dem z
erst gefundenen $\log a$ mit Inbegriff seiner Aenderungen, d
Zahl a mit ihren Aenderungen suchen, oder aber endlic
ob wir lieber diese Methode ganz aufgeben und nach ein
anderen Methode rechnen sollen.

Diese beiden ersten Methoden haben das Angenehm
dafs wir immer mit der unerläfslichen scharfen Berechnu
der Widersprüche schon gelegentlich diese Berechnu
der Coefficienten verbinden, dabei aber von der Schärfe d
Rechnung ohne Schaden etwas nachlassen können, wie di
in unseren Beispielen schon mehrfach nachgewiesen i
Wenn aber keine von beiden Methoden sich bequem a
wenden läfst, so gebrauchen wir die

Dritte Methode.

Diese besteht darin, dafs wir die fraglichen Coef
cienten unmittelbar für sich allein in einer abgesonde
ten Rechnung suchen, ohne dazu endliche Gleichung
(9) zu benutzen, die wir nicht einmal zu besitzen brauche
wenn wir nur die Widersprüche auf irgend eine Weise scha
berechnen können. Wie wir diese abgesonderte Rechnu
einrichten sollen, erfordert zwar in jedem besonderen Fal
auch eine besondere Ueberlegung, dieselbe knüpft sich ab
immer an feste Grund-Principien, die wir uns hier merk
wollen.

Zu dem Ende gehen wir auf unseren §. 59. zurück u
vergegenwärtigen uns, dafs in den Gleichungen n. 43 noc

chts weiter ausgesagt ist und ausgesagt seyn kann, als dafs
e v solche Zahlen-Werthe erhalten müssen, welche die
$+v$ unter sich verträglich machen. Wie aber diese Zah-
ı-Werthe sonst beschaffen sind, darüber ist in n. 43 noch
chts bestimmt, sondern diese Bestimmung erfolgt erst
rch Zuziehung der Gleichung (12) auf die in (13) und
4) angezeigte Weise, welche eben wesentlich darauf be-
ıte, dafs wir uns berechtigt fanden, die v in n. 43 noch
veränderlich zu betrachten.

Dies zeigt uns, dafs die Coefficienten in den Bedin-
ngsgleichungen unabhängig seyn müssen von den speciel-
ı Zahlen-Werthen, die wir etwa den v beilegen, wie sich
ch aus Betrachtung der Gleichungen (9) und (11) un-
ttelbar ergiebt.

Hieraus können wir nun für die Coefficienten jeder ein-
nen Bedingungsgleichung folgende zwei Lehrsätze
leiten:

1) Jede allgemeine Bedingungsgleichung mufs auch
n speciellen Fall in sich begreifen, wo das $w = 0$ wird.
eser specielle Fall kann nämlich auf dreierlei Weise ein-
ten; entweder dadurch,

a) dafs alle o schon ursprünglich unter sich verträglich
waren (was, freilich nur zufällig, allerdings der Fall
seyn könnte), so dafs also alle $v = 0$ gesetzt werden
dürfen; oder dadurch,

b) dafs alle v solche Werthe erhalten haben, welche
sämmtliche $o+v$ unter sich verträglich machten; oder
endlich dadurch,

c) dafs einige $v = 0$ sind, den übrigen v (deren dann
aber wenigstens zwei seyn müssen) aber solche Wer-
the beigelegt werden, dafs ihre $o+v$ unter sich und
mit den anderen o verträglich werden.

In allen diesen Fällen ist es wegen $w = 0$ erlaubt die Coefficienten der Bedingungsgleichung mit beliebige Zahlen zu multipliciren oder zu dividiren.

2) Wenn wir alle v, die in einer Bedingungsgleichung vorkommen, bis auf eines, $= 0$ setzen, d. h. mit andere Worten, wenn wir eine Beobachtung als überschüssig betrachten, die übrigen in der Gleichung vorkommenden aber als fehlerfrei; so wird die scharfe Berechnung jener eine aus diesen übrigen uns nothwendig ein O geben, welche dem entsprechenden $o+v$ gleich gesetzt werden mufs, damit dieses $o+v$ mit den übrigen als fehlerfrei betrachteten verträglich werde. Demnach ist also dieses eine v gegeben durch die Gleichung

$$0 = (o-O)+v$$

welche auch einen speciellen Fall unserer Bedingungsgleichung vorstellen mufs.

Diese beiden Sätze zeigen uns also, dafs wir in einer jeden Bedingungsgleichung z. B.

$$0 = w_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4$$

zu 1) das Verhältnifs je zweier beliebiger und aller Coefficienten, z. B. $b_1 : b_2$; $b_2 : b_3$ u. s. w. oder $b_1 : b_2$; $b_1 : b_3$ u. s. w. finden können, wenn wir uns auf irgend eine Weise die Frage beantworten: „durch welche lineare Gleichung müssen jede zwei beliebige mit einander verbunden seyn, damit die beiden entsprechenden $o+v$ mit allen übrigen o, die in dieser Gleichung vorkommen, verträglich werden?"

zu 2) dafs wir auch das Verhältnifs eines Coefficienten zu dem absoluten Gliede der Bedingungsgleichung finden können, wenn wir eine Beobachtung aus allen übrigen in der Bedingungsgleichung vorkommenden scharf berechnen.

Da wir letzteres nun immer in unserer Gewalt haben, können wir den Ansatz vollständig bewirken, sobald die eantwortung der zuerst erwähnten Frage gelungen ist.

Die Art und Weise dieser Beantwortung hängt nun frei-ch im Einzelnen von den jedesmaligen besonderen Umstän-n ab; wir erkennen aber leicht, dafs sie im Allgemeinen rauf hinaus kommt, statt der in (9) und (11) vorausge-tzten partiellen Differentiation einer gegebenen Gleichung d nachherigen Substitution, hier eine unmittelbare etrachtung über die gegenseitige Abhängigkeit der unend-ch kleinen Aenderungen je zweier von denen durch ne Bedingung verbundenen Gröfsen eintreten zu lassen, ter der Voraussetzung, dafs dadurch die Verträglichkeit cht gestört werde.

Wir bemerken zuletzt noch, dafs die numerischen Rech-ngen, die dadurch veranlafst werden, keiner gröfseren enauigkeit bedürfen, als welche wir sonst bei den Coef-ienten der entsprechenden Differentialgleichung auch an-wandt hätten; vorausgesetzt nur immer, dafs der Wider-ruch, welcher weggeschafft werden soll, scharf berech-t sey.

§. 83.

Ehe wir weiter gehen, wird es wohl zweckmäfsig seyn, n leichtes übersichtliches Beispiel ganz ausführlich vor-nehmen, um daran alle drei Methoden zu erläutern. Wir ählen dazu das zweite Beispiel des §. 68. **Fig. 10.**, wo einem Dreiecke alle sechs Stücke gemessen waren.

Es bestehen nach §. 80. hierbei drei Bedingungen, eine veiter Klasse, und zwei dritter Klasse, die wir nach §. 81. if mehrfache Weise aufsuchen und darstellen konnten. Wir ollen nun die erste der Bedingungsgleichungen dritter

Klasse nach unseren drei Methoden ansetzen, und dazu wieder als gemessen voraussetzen:

$o_1 = {}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot} = 604$ Zehntel-Ruthen $\quad o_3 = {}^{2}_{1}{}^{3} = 57^\circ\,55'$

$o_2 = {}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot} = 698$ - - $\quad o_4 = {}^{3}_{2}{}^{1} = 46\ 40$

Auch wollen wir vom Anfange unsere Bedingungsgleichungen wieder so einrichten, dafs wir die v für die Winkel in Minuten, für die Seiten in Zehntel-Ruthen erhalten, nach der schon im §. 68. gemachten Voraussetzung, die freilich nur zur Abkürzung gemacht war, wogegen in ernstlichen Anwendungen Werthe vorzuliegen pflegen, die der Wahrheit viel näher sind. Wir rechnen hier aber das, was scharf zu rechnen ist, zum Unterschiede doch mit sieben Decimalen, obwohl fünf genügen würden, wenn so grofse Abweichungen, als wir in diesem Beispiele voraussetzen, wirklich vorkämen.

Erste Methode.

Wir haben hier zwischen den vier Stücken, für welche Beobachtungen in diesen Bedingungsgleichungen vorkommen, eine geschlossene Gleichung. Sie heifst nach Anleitung des §. 58.

$$(9) \qquad 0 = {}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}\ sin\ {}^{2}_{1}{}^{3} - {}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}\ sin\ {}^{3}_{2}{}^{1} = \varphi_2.$$

Setzen wir die beobachteten Zahlen-Werthe in diese Gleichung, so erhalten wir:

$log\ {}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}$	= 2,7810369	$log\ {}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}$	= 2,8438554
$log\ {}^{2}_{3}{}^{1}$	= 9,9280251	$log\ sin\ {}^{3}_{2}{}^{1}$	= 9,8617576
	2,7090620		2,7056130
	511,7548		507,7068

Also ist zu setzen:

$$(10) \qquad w_2 = +4{,}048$$

Nun differentiiren wir unsere Gleichung (9) und erhalten

1) $d\varphi_2 = sin\,{}^{2}_{1}{}^{3}\,d\,{}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot} - sin\,{}^{3}_{2}{}^{1}\,d\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot} + \frac{60}{\varrho}\,{}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}\,cos\,{}^{2}_{1}{}^{3}\,d\,{}^{2}_{1}{}^{3}$
$- \frac{60}{\varrho}\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}\,cos\,{}^{3}_{2}{}^{1}\,d\,{}^{3}_{2}{}^{1}$

Die Coefficienten berechnen wir nun durch Substitution r beobachteten Zahlen-Werthe, mit fünf Decimalen. so:

$log\,\frac{60}{\varrho} = 6{,}46372$	$log\,\frac{60}{\varrho} = 6{,}46372$	$b_1 =$	$sin\,{}^{2}_{1}{}^{3} = +0{,}8473$
$log\,{}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot} = 2{,}78104$	$log\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot} = 2{,}84386$	$b_2 =$	$-sin\,{}^{3}_{2}{}^{1} = -0{,}7274$
$cos\,{}^{2}_{1}{}^{3} = 9{,}72522$	$log\,cos\,{}^{3}_{2}{}^{1} = 9{,}83648$	$b_3 =$	$+0{,}0933$
$8{,}96998$	$9{,}14406n$	$b_4 =$	$-0{,}1393$

mnach ist unsere gesuchte Bedingungsgleichung:

$$0 = +4{,}048 + 0{,}8473\,({}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}) - 0{,}7274\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}) + 0{,}0933\,({}^{2}_{1}{}^{3}) - 0{,}1393\,({}^{3}_{2}{}^{1})$$

Zweite Methode.

Da der Widerspruch sich hier so bequem logarithmisch rechnen läfst, so benutzen wir gleich gelegentlich die lorithmischen Differenzen und haben also:

$log\,{}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot} = 2{,}7810369 + 7190{,}5\,({}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot})$	$log\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot} = 2{,}8438554 + 6222{,}0\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot})$
$sin\,{}^{2}_{1}{}^{3} = 9{,}9280251 + 792{,}0\,({}^{2}_{1}{}^{3})$	$log\,sin\,{}^{3}_{2}{}^{1} = 9{,}8617576 + 1192{,}0\,({}^{3}_{2}{}^{1})$
$2{,}7090620$	$2{,}7056130$

mnach ist die Bedingungsgleichung:

$$0 = +34490 + 7190{,}5\,({}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}) - 6222{,}0\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}) + 792{,}0\,({}^{2}_{1}{}^{3}) - 1192{,}0\,({}^{3}_{2}{}^{1})$$

uf diese Weise haben wir es auch eigentlich schon §. 68. macht, indem ich gerade diese Methode als die bei Weim bequemste für den vorliegenden Fall wählte. Die Zahn der dortigen Bedingungsgleichung finden sich den jetzigen so genau proportionirt, als bei den dort Kürze halber ngewandten 5 Decimalen zu erwarten ist.

Dritte Methode.

Wir müssen, um diese Methode hier anzuwenden uns mit Absicht vorsetzen, die beiden vorigen Methoden die sich uns gleichsam von selbst darbieten, nicht anwenden zu wollen. Nun fragen wir zuerst blofs nach drei Verhältnissen zwischen je zweien von den vier Coefficienten.

Setzen wir also:

1) die beiden Winkel als richtig voraus, so haben wir nach den bekannten Differentialformeln des ebenen Dreieckes:

$$0 = \sin {}^{2}_{1}{}^{3}\,({}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}) - \sin {}^{3}_{2}{}^{1}\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot})$$

also $b_1 : b_2 = \sin {}^{2}_{1}{}^{3} : -\sin {}^{3}_{2}{}^{1} = +0{,}8473 : -0{,}7274$

2) Setzen wir die beiden Seiten als richtig voraus, so ist

$$0 = {}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}\cos {}^{2}_{1}{}^{3}\,({}^{2}_{1}{}^{3}) - {}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}\cdot\cos {}^{3}_{2}{}^{1}\,({}^{3}_{2}{}^{1})$$

also $b_3 : b_4 = {}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}\cos {}^{2}_{1}{}^{3} : -{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}\cos {}^{3}_{2}{}^{1}$

$= num.\ log\ 2{,}50626 : -\ num.\ log\ 2{,}68034$

$= \quad +320{,}82 \quad : -\ 479{,}00$

3) Setzen wir den Winkel ${}^{2}_{1}{}^{3}$ und die Seite ${}^{3\cdot 1}_{\cdot\ \cdot}$ als richtig voraus, so erhalten wir

$$0 = \sin {}^{3}_{2}{}^{1}\,({}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}) + \frac{60}{\varrho}\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}\cos {}^{3}_{2}{}^{1}\,({}^{3}_{2}{}^{1})$$

also $b_2 : b_4 = \sin {}^{3}_{2}{}^{1} : \frac{60}{\varrho}\,{}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot}\cos {}^{3}_{2}{}^{1}$

$= num.\ log\ 9{,}86176 : num.\ log\ 9{,}14406$

$= \quad +0{,}7274 \quad : +\ 0{,}1393$

Ferner müssen wir nun, um den Widerspruch zu finden eines von den beobachteten Stücken aus den drei übrigen scharf berechnen. Welches wir dazu wählen, ist im Grunde gleichgültig, da es nur auf das Verhältnifs des w_2 zu einem der b ankommt. Wir wollen in unserem Falle den Winkel ${}^{2}_{1}{}^{3}$ dazu wählen, weil wir aus unserer Berechnung nach de

sten Methode schon wissen, dafs $(^2_1{}^3)$ den kleinsten Coefficienten hat, dafs wir also möglichst grofse Zahlen in die Bedingungsgleichung bringen, wenn wir diesen in 1 verwandeln; auch, da wir für den mittleren Fehler der Winkel eine volle Minute gesetzt haben, den Winkel von ungefähr 1° noch mit hinreichender Schärfe aus seinem Sinus werden finden können.

So erhalten wir $log\ sin\ (^2_1{}^3) = 9{,}9245761$

so berechnet $(^2_1{}^3) = O_3 = 57^\circ 12' 2'',9 = 57^\circ 12',048$

beobachtet war $o_3 = 57\ 55$

so ist $0 = +42{,}952 + (^2_1{}^3)$

und somit, unter Zuziehung unserer obigen Verhältnisse, unsere erste Bedingungsgleichung:

$$0 = +42{,}952 + \frac{0{,}8473}{0{,}1393}\cdot\frac{479{,}00}{320{,}82}(^3_\cdot{}^1_\cdot) - \frac{0{,}7274}{0{,}1393}\cdot\frac{479{,}00}{320{,}82}(^2_\cdot{}^3_\cdot) + (^2_1{}^3) - \frac{479{,}00}{320{,}82}(^3_2{}^1)$$

d. h.

$$= +42{,}952 + 9{,}0792(^3_\cdot{}^1_\cdot) - 7{,}7943(^2_\cdot{}^3_\cdot) + (^2_1{}^3) - 1{,}4931(^3_2{}^1)$$

Die drei Formen der Bedingungsgleichung, die wir nach den drei Methoden gefunden haben, zeigen sich der Sache nach als identisch, da ihre Zahlenwerthe einander so nahe proportionirt sind, als sich nach den gemachten Voraussetzungen erwarten liefs. Denn wir dürfen nicht vergessen, dafs das Beispiel nur bestimmt ist, den Gang der Rechnung zu erläutern, wogegen bei ernstlicher Anwendung nur relativ unendlich kleine Fehler zu berichtigen sind.

Es braucht wohl nicht bemerkt zu werden, dafs die dritte Methode bei Aufsuchung der Verhältnisse der Coefficienten noch nach den Umständen der jedesmaligen Aufgabe einen weiten Spielraum für die Ueberlegung läfst, welche Verhältnisse man am leichtesten findet und also zuerst

aufsucht. Enthält nämlich die fragliche Bedingungsgleichung n Glieder, so sind nur $n - 1$ Verhältnisse zu finden und zu dem Ende aus den $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$, welche existiren, diejenigen auszulesen, welche sich am leichtesten ergeben.

Wir wenden uns nun zur Anwendung der bisherigen allgemeinen Grundsätze auf die einzelnen practischen Fälle.

Zehntes Kapitel.

Ansatz für ebene Figuren, in denen blofs Winkel gemessen sind.

---

§. 84.

Der Fall, wo blofs Winkel-Beobachtungen zur Ausgleichung vorliegen, ist in der practischen Geometrie der am häufigsten vorkommende, und deshalb zuerst zu berücksichtigen. Wir finden ihn bei jeder Triangulirung, worin überschüssige Richtungen („Control-Beobachtungen") aufgenommen sind, und haben dann im Allgemeinen, schon nach dem, was im vorigen Abschnitte vorkam, dreierlei Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Die Bedingungsgleichungen erster Klasse ergeben sich daraus, dafs alle Winkel rings um einen Punkt auf 360° schliefsen müssen. Sie fallen weg, wenn wir entweder sogenannte Satzbeobachtungen gemacht, oder den Horizont abgeschlossen, oder die Winkel aus Compafsstrichen genommen haben. In diesen Fällen ist nämlich die Bedingung immer schon durch die Beobachtungs-Methode erfüllt. Es bleibt also nur der Fall übrig, wo einzelne Winkel rings um einen Punkt gemessen sind.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen erster
asse, welche z_{b_1} heifsen mag, findet sich dann bei einer
liebigen Linien-Verbindung immer durch blofses Abzäh-
ı der Punkte, welche ringsum von einzeln gemessenen
inkeln eingeschlossen sind. Hätten wir also z. B. die
ig. 12. in Betrachtung, aus welcher wir unsere obige
ig. 8. entnommen denken können; so ist, wenn über-
upt Bedingungsgleichungen erster Klasse statthaft sind,
ren Anzahl vier, weil die vier Punkte 1; 3; 4; 5 von
messenen Winkeln rings umschlossen sind, indem wir
raussetzen, dafs im Punkte 6 keine Winkel gemessen sind.

Die Aufsuchung und Darstellung dieser Be-
ngungen hat niemals Schwierigkeiten, denn die Bedin-
ng ist nothwendig immer eine und dieselbe.

Der Ansatz der Bedingungsgleichungen ist gleich-
ls nothwendig immer ein und derselbe, da die Bedingun-
n immer in linearen endlichen Gleichungen dargestellt
ıd.

Demnach können wir uns in allen Fällen der Art, die
s etwa in der Praxis vorkommen, ganz nach dem Bei-
iele des §. 62. richten, und haben uns blofs bei etwa statt-
ıdender Verschiedenheit der Genauigkeit für die einzelnen
:obachtungen an das zu halten, was über die weitere Bear-
itung der Bedingungsgleichungen im Allgemeinen im vo-
ıen Abschnitte vorgetragen ist.

§. 85.

Die Bedingungsgleichungen zweiter Klasse ent-
:hen, wie wir wissen, dadurch, dafs eine Anzahl an ver-
hiedenen Punkten gemessener Winkel (Richtungs-Unter-
hiede) eine Summe geben mufs, welche gleich ist der theo-

retisch nothwendigen Winkelsumme einer geschlossene ebenen Figur.

Hieraus folgt zuerst, dafs wir für die Bestimmung de Anzahl dieser Bedingungsgleichungen zweiter Klasse, di mit z_{b_2} bezeichnet werden soll, immer nur solche Richtun gen zu berücksichtigen haben, die beiderseits mit an deren Richtungen zu Winkeln verbunden sind. Wir werde also in zusammengesetzten Richtungs-Systemen vorerst all Richtungen unberücksichtigt lassen müssen, in welchen nu auf einer Seite beobachtet worden ist, und somit alle Punkte in welchen überhaupt keine Winkel gemessen sind. Deute wir solche einseitig festgelegte Richtungen in unseren Fi gurenzeichnungen, wie gewöhnlich, dadurch an, dafs wi sie nur auf der einen Seite ausziehen, wo beobachtet ist, au der anderen aber punktiren; so haben wir für Abzählung de Bedingungen zweiter Klasse also erst alle theilweise punk tirten Linien wegzudenken.

Finden wir dann noch etwa einen oder den andere Punkt in der Figur, der nur durch eine Linie mit einer der übrigen zusammenhängt, so ist derselbe nebst seiner Ver bindungslinie auch noch wegzudenken, weil er zum Schluss der Figur nichts beiträgt, und also als fremder Punkt z betrachten ist.

So sehen wir z. B. gleich aus **Fig. 9.**, dafs §. 68. nu eine Bedingungsgleichung zweiter Klasse stattfinden konnte weil nach Tilgung des Punktes 4, wegen der entsprechende einseitig beobachteten Richtungen, nur ein Dreieck übri bleibt. Wollen wir ferner für **Fig. 12.** die Anzahl de Bedingungsgleichungen zweiter Klasse finden, so entneh men wir daraus erst die **Fig. 13.**, um ganz sicher zu seyn dafs wir durch keine fremdartigen Richtungen mehr gestö werden.

Nach dieser Vorbereitung können wir denn zu der Ab-
hlung selbst schreiten. Es ist aber zweckmäfsig, die
ızahl der Bedingungsgleichungen, die wir am Ende er-
lten müssen, im Voraus zu bestimmen, um uns gegen al-
Verzählen sicher zu stellen. Dies geschieht nun nach
ıem Lehrsatze (dem ersten der beiden Gaufsischen
meinen *Beiträgen S.* 166. mitgetheilten), welcher so
ıtet:

Wenn p Punkte durch l beiderseits, gegen Linien desselben Systemes, festgelegte Linien verbunden sind, so ist:

$$\text{n. 57.} \quad z_{b_2} = l - p + 1.$$

:n Beweis dieses Lehrsatzes finden wir so:

I. Wenn wir p Punkte zu einer geschlossenen Figur
rbinden wollen, so gebrauchen wir dazu nothwendig p
nien, indem wir den ersten Punkt mit dem zweiten, den
eiten mit dem dritten, u. s. w. und dann den vorletzten mit
m letzten, den letzten aber wieder mit dem ersten zu ver-
ıden haben. — Die Ordnung, in welcher wir die Punkte
bei zählen, ist ganz gleichgültig, insofern wir nur das
ort „geschlossene Figur" in der allgemeinen Bedeutung
hmen, worin es auch solche Linien-Systeme umfafst, bei
lchen nicht nur überstumpfe Winkel, sondern auch Durch-
euzungen der Verbindungs-Linien statt finden können.
e **Fig. 14.** und **15.** erläutern dies an Beispielen von
nien-Systemen mit fünf Punkten.

II. Bestimmen wir nun die Richtungsunterschiede je
eier Linien dadurch, dafs wir den Winkel angeben, um
lchen die zweite von der Verlängerung der ersten von
ks zu rechts abweicht; (auf dieselbe Art, wie wir in der
actischen Geometrie bei polygonometrischen Aufgaben

gewohnt sind, die reducirten Winkel zusammenzusetzen so mufs die Summe dieser Richtungs-Unterschiede imm nothwendig entweder 360° oder ein Vielfaches von 360° seyn wie wir uns leicht überzeugen, wenn wir durch irgend eine Punkt Parallellinien mit den entsprechenden Richtungen g legt denken. — Die **Fig. 16.** erläutert dies in Beziehun auf die beiden ersten Zeichnungen der **Fig. 14.**

III. Die eben erwähnten Richtungs-Unterschiede ha ben nun mit den Winkeln, die sich in dem Linien-Systeme fi den, einen nothwendigen Zusammenhang, indem jeder Rich tungs-Unterschied gefunden wird durch Subtraction des en sprechenden Polygon-Winkels von 180° oder von 540°. - Folglich mufs in jeder geschlossenen Figur, worin p Punkt durch die p unentbehrlichen Linien verbunden sind, ein Bedingung für die Winkel bestehen, welche zwischen de unentbehrlichen Verbindungs-Linien gemessen sind.

IV. Kommt nun zu den p unentbehrlichen Linien noc eine weitere überschüssige Linie hinzu, so kann diesel nur zwischen zwei Punkten gezogen werden, welche zu noch nicht verbunden waren. Demnach wird nothwendi die zu I. geschlossene Figur durch die neue überschüssig Linie in zwei neue geschlossene Figuren zerlegt, welche beiden die fragliche überschüssige Linie angehört. Wen den wir nun auf eine dieser beiden Figuren die Schlüss zu II. und III. an, so erhalten wir eine neue selbstän dige Bedingung für die Winkel dieser Figur. Wir sehe nun leicht, dafs diese neue Bedingung, mit der zu III. fü die ursprügliche Figur gefolgerten zusammengedacht, noth wendig auch die Bedingung erfüllen mufs, welche wir er halten hätten, wenn wir statt der einen der beiden neu ent standenen Figuren die andere gewählt hätten; und eben s dafs die Bedingung für die Winkel der ganzen Figur erfül

yn mufs, wenn die Bedingungen für die beiden Theile füllt sind. — Die eine hinzutretende überschüssige nie liefert uns also auch eine und nur eine, neue Bedin- ng für die gemessenen Winkel.

V. Dieselben Schlüsse lassen sich nun auf jede über- hüssige Linie anwenden. Hieraus folgt also, dafs wir in dem solchen Linien-Systeme, in welchem u Linien über- hüssig sind, nothwendig $u+1$ selbständige Bedingungen veiter Klasse für die gemessenen Winkel haben.

VI. Bezeichnen wir nun die Anzahl der Linien, welche erhaupt in dem Systeme vorkommen, mit l, so ist, weil Linien unentbehrlich sind, um eine geschlossene Figur Stande zu bringen, $u = l - p$, und ist also die Anzahl r Bedingungsgleichungen zweiter Klasse

$$z_{b_2} = u + 1 = l - p + 1. \quad \text{W. Z. E. W.}$$

legentlich erkennen wir hier auch, da l mindestens $= p$ d höchstens $= \frac{p \cdot (p-1)}{1 \cdot 2}$ ist, dafs mindestens eine und chstens $\frac{p \cdot (p-3)}{1 \cdot 2} + 1$ Bedingungsgleichungen zweiter asse zur Ausgleichung eines Systemes von p Punkten, die rch beiderseits festgelegte Linien verbunden sind, statt den müssen.

In unserer **Fig. 13.** haben wir nun $p = 10$ und l 21, folglich sind für die Ausgleichung 12 Bedingungs- eichungen zweiter Klasse anzuwenden; wie wir uns auch durch anschaulich machen können, dafs wir, um in ge- ılossenem Zuge von Punkt zu Punkt fortzuschreiten, immer r 10 Linien gebrauchen, wodurch also die 11 übrigen als erschüssig erscheinen.

§. 86.

Steht nun die Anzahl fest, so hat die Aufsuchun keine Schwierigkeit mehr. Wir können uns dazu gewöhn lich blofs der Dreiecke bedienen, da bei unseren practische Aufgaben diese doch in der Regel immer vorzugsweise vor kommen. Haben wir diese durchgegangen und uns dabei i Acht genommen, dafs wir keines darunter mitgezählt, des sen Winkelsumme aus den übrigen sich ergiebt, und i dann etwa unsere Anzahl noch nicht voll, so werden wi uns zu den Vierecken u. s. w. zu wenden haben. — Wi dabei in einzelnen Fällen zu verfahren ist, hängt natürlic von den jedesmaligen Umständen ab. Wir wollen also n ein Beispiel geben.

Sollen wir also für unsere **Fig. 13.** die Bedingun gen zweiter Klasse aufsuchen, so sehen wir zuerst zwische den Linien $\overset{4}{\cdot}\cdot\overset{10}{\cdot}$ und $\overset{3}{\cdot}\cdot\overset{11}{\cdot}$ unten herumgezählt, eine ganz Kette zusammenhängender Dreiecke, die also auf 180° schlie fsen müssen. Zeichnen wir uns erst diese auf, so sind ih rer 8. Wir wissen aber, dafs 12 Bedingungen bestehe und müssen also noch 4 weitere finden.

Wenden wir uns nun zuerst an die Dreiecke, die obe zwischen den beiden angegebenen Linien liegen, so sin deren 4. Diese 4 Dreiecke geben uns aber nur 3 unabhän gige Bedingungsgleichungen, wie wir, wenn es noch nö thig wäre, uns auch erst besonders überzeugen könnten, da durch, dafs zwischen den vier Punkten 3; 11; 10; 4 sech Linien gezogen sind, welches also nach unserer n. 57 n 3 Bedingungen anzeigt. Wir zeichnen uns also erst wied drei von diesen Dreiecken auf, mit Weglassung des vierte wobei es willkührlich bleibt, welches wir weglassen wolle

un haben wir also 11 Bedingungen gefunden und bleibt
ir noch eine zu suchen.

Diese eine noch fehlende finden wir in dem Vierecke
3, 4, 5, dessen Winkelsumme auf 360° schliefsen mufs.

Es ist nun zwar keineswegs nothwendig, dafs wir ge-
de auf diese Weise verfahren. Wir hätten z. B. mehrere
er betrachteten Figuren zusammennehmen können, und
so statt der drei Dreiecke 4, 10, 9; 5, 4, 9 und 8, 5, 9 das
ne Dreieck 5, 4, 9 und die beiden Vierecke 5, 4, 10, 9 und
5, 4, 9 vornehmen können. Ja wir wollen auch nicht ge-
de die Möglichkeit läugnen, dafs einzelne Fälle vorkom-
en könnten, wo solche Combinationen vielleicht einigen
utzen gewähren könnten, versteht sich, dafs die Unab-
ingigkeit gewahrt bleibe. Ich gestehe aber, dafs mir ein
lcher Fall bis jetzt nicht nur nicht vorgekommen ist, son-
ern dafs ich mir auch nicht wohl einen solchen bis jetzt
orstellen kann; und rathe also zu dem oben angegebenen
nfachsten Wege, d. h. bei der Aufsuchung immer mit den
reiecken anzufangen.

Die Darstellung der Bedingungen in Gleichungen
on der Form (9) des §. 58. ergiebt sich dann sehr leicht,
nd wir haben also unmittelbar z. B.

$$(10) \qquad w_1 = {}^{10}_{4}{}^{9} + {}^{9}_{10}{}^{4} + {}^{4}_{9}{}^{10} - 180^\circ \text{ u. s. w.}$$

er Ansatz der Bedingungsgleichungen selbst ist endlich
nn auch ohne alle Schwierigkeit, da diese Gleichungen
othwendig linear sind. Wir müssen nur, wie im vorigen
bschnitte vielfältig an Beispielen gezeigt ist, uns erst ent-
heiden, ob wir die Winkel als solche, oder ob wir die
nzelnen Richtungen verbessern wollen; welches letztere,
ie öfters (namentlich auch schon §. 44.) bemerkt ist, we-
ntliche practische Vortheile hat.

Wollten wir auf die erste Weise verfahren, so erhielten wir die Bedingungsgleichungen in der Form

$$0 = w_1 + \binom{10}{4}^{9} + \binom{9}{10}^{4} + \binom{4}{9}^{10}$$

Verfahren wir aber auf die zweite Weise, so stehen unsere Bedingungsgleichungen auf der Form

$$0 = w_1 + \binom{9}{4} - \binom{10}{4} + \binom{4}{10} - \binom{9}{10} + \binom{10}{9} - \binom{4}{9}$$

Es versteht sich von selbst, dafs wir die zweite Ansatz-Weise nur anwenden können, insofern wir voraussetzen dürfen, dafs jede Visirlinie, die zwei oder mehreren verschiedenen Figuren angehört, überall eine und dieselbe gewesen ist, also auch auf eine und dieselbe Weise zu verbessern ist, d. h. insofern wir durch Horizont-Abschluſs oder durch die Beobachtungs-Methode schon die Bedingungsgleichungen erster Klasse beseitigt haben, die sich sonst etwa ergeben hätten; oder insofern wir letztere mit berücksichtigen.

§. 87.

Die Bedingungsgleichungen dritter Klasse bezwecken nach dem Obigen solche Verbesserungen der gemessenen Winkel (Richtungs-Linien), die sie in Beziehung auf die daraus abzuleitenden Seitenverhältnisse unter sich verträglich machen, so dafs jedes verlangte Seitenverhältniſs sich immer auf dieselbe Weise ergeben muſs, welche beliebige von den Winkeln auch zu seiner Berechnung benutzt werden mögen.

Da wir nun die Seitenverhältnisse der Figuren berechnen können, ohne alle Winkel zwischen ihren Linien zu benutzen, so ist klar, dafs wir nicht, wie im §. 85. geschah, die blofs einseitig festgelegten Richtungen weglassen dürfen, sondern alle Verbindungs-Linien in Betracht ziehen müssen, weil ihre Richtungen auf Verschiedenheit der Sei-

enverhältnisse Einfluſs haben können. In unserem Beiiele hätten wir also zur ursprünglichen **Fig. 12.** zurückukehren.

Zur Abzählung der Bedingungsgleichungen dritter lasse benutzen wir den (*Beiträge S.* 166. angegebenen weiten *Gaufsischen*) Lehrsatz:

> Wenn p Punkte durch l, ihrer Richtung nach (gleichviel ob einseitig oder doppelt) gegen andere Linien desselben Systemes festgelegte, Linien trigonometrisch verbunden sind, so ist

n. 58. $$z_{b_3} = l - 2p + 3$$

er Beweis dieses Satzes ergiebt sich folgendermaafsen:

I. Wenn ein System von Punkten trigonometrisch beimmt seyn soll, so müssen dazu vorerst zwei Punkte deren Entfernung als einstweilen beliebige Maafs-Einheit ienen mag) gegeben seyn, d. h. wir müssen die eine ichtung, welche sie verbindet, entweder auch beliebig anehmen, oder wir müssen sie schon zum Voraus kennen, urch die Stellung, die unser System gegen andere fremde ysteme haben soll. Kurz sie mufs uns zur Orientirung ienen.

II. Der dritte Punkt, der den beiden ersten trigonoietrisch anzuschliefsen ist, erfordert nun zu seiner Bestimung zwei Richtungen, von denen wenigstens eine durch Vinkelmessung mit der einen zu I. betrachteten verknüpft t; (indem nämlich der Punkt durch eine solche Winkelessung schon bestimmt ist, wenn die beiden Richtungen ater einander an ihm selbst einen gemessenen Winkel ilden).

III. Jeder folgende Punkt erfordert auch zwei und ur zwei Richtungen, welche durch beliebige schon vorher

bestimmte Punkte gehen, und von denen wenigstens eine i einem dieser Punkte durch Winkelmessung mit einer scho bestimmten Richtung verbunden ist.

IV. Demnach sind zur trigonometrischen Bestimmun eines Systemes von p Punkten aufser der einen Richtung welche zur Orientirung dient, noch weitere $2(p-2)$ Rich tungen durch Winkelmessung festzulegen, und also $2p-$ Linien nothwendig.

V. Jede Linie, welche nun überdies noch zwei Punkt des Systemes verbindet, ist der Lage und Länge nach ge geben und somit auch ihr Verhältnifs zur Maafs-Einhei Hieraus folgt, dafs jede überschüssige Linie eine Bedin gung dritter Klasse mit sich bringt, gleichviel ob sie ein seitig oder doppelt festgelegt ist, und ob sie also zu Be dingungen zweiter Klasse Veranlassung giebt oder nicht.

VI. Bezeichnet nun u die Anzahl der überschüssige Linien, so ist $u + 2p - 3 = l$, d. h. also

$$z_{b_2} = u = l - 2p + 3 \quad \text{W. Z. E. W.}$$

Als Zusätze zu unserem Lehrsatze bemerken w Folgendes:

1) Es versteht sich von selbst und ist deshalb nich ausdrücklich bevorwortet, dafs ein Punkt, durch welche nur eine Richtung gienge, als ein fremder, gar nich zu dem Systeme gehöriger, und in Beziehung darauf unbe stimmt bleibender, zu betrachten und also nebst seiner Rich tung gar nicht mitzuzählen wäre. — Aufser diesen frem den Punkten können aber möglicherweise noch andere Punkt mit einem trigonometrischen Systeme zusammenhängen, wel che ihm gleichfalls fremd und also gleichfalls von de Abzählung sammt ihren Richtungen wegzulassen sind. — Dies sind solche, von welchen aus Richtungen durch Punkt

es Systemes gehen, ohne in wenigstens einem derselben
urch Winkel-Messungen mit anderen Richtungen verbun-
en zu seyn. — Gehen nämlich von einem solchen Punkte
wei einseitige Richtungen aus, so ist bekanntlich nur der
reisbogen bestimmt, worin er liegt; gehen drei von ihm
us, so ist er nach Beschaffenheit der Umstände auch un-
estimmt, oder nach der Pothenotschen Aufgabe, also te-
agonometrisch, nicht trigonometrisch, bestimmt; gehen
ehr als drei von ihm aus, so kann er nach den Umständen
ıbestimmt, bestimmt oder überschüssig bestimmt seyn. —
Wir bevorworteten das Nicht-Mit-Zählen dieser Art von
emden Punkten dadurch, dafs wir unseren Satz auf trigo-
onometrisch bestimmte Punkte beschränkten, wie sol-
ıe in der Praxis gewöhnlich vorkommen, und behalten uns
or unten, gelegentlich der Einschaltungen, auf die Aus-
leichungen zurückzukommen, wozu fremde Punkte dieser
tzten Art Veranlassung geben können.

2) Wenn ein Punkt nur durch zwei trigonometrisch
estimmte Richtungen mit anderen Punkten des Systemes
ısammenhängt, so sind diese beiden Richtungen als zu sei-
er Bestimmung nothwendig und unerläfslich zu betrachten.
emnach kann von solchen Punkten und den beiden Rich-
ngen, die zu ihm gehen, keine Bedingung dritter Klasse
ehr abhängen, und bleiben also die Richtungen für solche
unkte, die wir isolirte nennen wollen, jedenfalls in
eser Beziehung unausgeglichen. — Wir brauchen also
ır Abzählung der Bedingungsgleichungen dritter Klasse
ır keine Rücksicht mehr darauf zu nehmen, wodurch wir
ıs in der Praxis die Uebersicht erleichtern, indem wir,
ıch Weglassung der isolirten Punkte, deren i seyn mögen,
en Ausdruck $(l - 2i) - 2(p - i) + 3 = l - 2p + 3$

für die Anzahl der Bedingungsgleichungen dritter Klass richtig erhalten.

3) Es kann der Fall eintreten, dafs durch Weglassun eines isolirten Punktes und seiner beiden Richtungen auc noch ein zweiter oder gar ein dritter Punkt isolirt wird, durc welchen ursprünglich mehr als zwei Richtungen gienge Diese können dann natürlich bei der Abzählung auch weg gelassen werden. So finden wir z. B. in der **Fig. 17.** siebe Punkte und zwölf Linien. Es mufs also nur eine Bedin gung dritter Klasse bestehen. Wir sehen aber gleich, da der Punkt 7 isolirt ist. Tilgen wir ihn also, so werden da durch auch 5 und 6 isolirt. Tilgen wir diese beiden nu auch noch, so bleiben uns nur noch 4 Punkte mit 6 Linie und zwischen diesen mufs unsere eine Bedingung in diese Systeme enthalten seyn.

4) Da l mindestens $= 2p-3$ und höchstens $= \frac{p.(p-1}{1.2}$ seyn kann, so haben wir höchstens $\frac{p.(p-5)}{1.2}+3$ Bedin gungsgleichungen dritter Klasse bei der Ausgleichung eine Systemes von p Punkten.

5) Setzen wir $\frac{p(p-5)}{1.2}+3=1$, so wird $p=+4$ ode $=+1$. Da nun aus einem Punkte sich kein System bilde läfst, der letzte Werth uns also unbrauchbar ist, so erken nen wir, dafs wenigstens vier Punkte vorhanden seyn müs sen, wenn überhaupt von Bedingungsgleichungen dritte Klasse bei blofsen Winkelmessungen die Rede seyn sol Wir werden also ein System von vier Punkten, die durc sechs Linien verbunden sind, hier als das einfachste Syste zu betrachten haben, statt dafs wir bei den Bedingungsglei chungen zweiter Klasse das Dreieck als das einfachste Sy stem betrachteten.

Einfache Beispiele zur Anwendung unseres Lehr

zes finden sich in unserem vorigen Abschnitte und in den ten §§. des neunten Kapitels schon mehrere. Wir erken- n nun auch überall den Grund, weshalb gerade so viel dingungsgleichungen aufgestellt werden mufsten, als wir fgestellt haben, und sehen namentlich in Beziehung auf s zweite Beispiel des §. 80. jetzt ein, warum uns dort nur ch die Wahl zwischen verschiedenen Ausdrücken blieb, alle wesentlich nur eine und dieselbe Bedingung aus- rachen.

Wenden wir nun unseren Satz auf das Beispiel der ig. 12. an, so sehen wir zuerst, dafs wir in 12 einen iso- ten Punkt haben. Diesen und die beiden dazu führenden chtungen haben wir also wegzulassen. Nun bleiben uns ch 11 Punkte, welche durch 27 Linien verbunden sind. olglich müssen sich acht von einander unabhängige Be- ngungen dritter Klasse finden lassen.

§. 88.

Für die Aufsuchung der Bedingungsgleichungen itter Klasse kann man im Allgemeinen die Regel geben: an suche, nach Ausscheidung der etwa zufällig vorhande- n fremden Punkte und nach Weglassung der isolirten nkte, so wie derer, die etwa durch diese Weglassung lbst wieder isolirt werden, das übrig bleibende Linien-Sy- em in mehrere kleine Systeme zu zerlegen, bei welchen an nach dem vorigen §. jedesmal nur eine Bedingungs- eichung hat. Dabei fange man immer von den einfachsten ystemen an und schreite so allmälig fort, bis so viele von nander unabhängige Bedingungen gefunden sind, als nach em vorigen §. überhaupt vorhanden seyn müssen.

Diese Regel enthält allerdings noch sehr viel Unbe- immtes. Es tritt aber in der Praxis ein günstiger Umstand

ein, welcher verursacht, dafs man in der bei weitem gröfs
ten Mehrzahl der Fälle doch damit nicht nur zum Ziel
sondern auch auf eine sehr bequeme Weise zum Ziele komm
wie sich gleich zeigen wird.

Es pflegen nämlich durch die Richtungslinien trigono
metrischer Netze, nach Weglassung der isolirten Punkt
vielfältig Figuren zu entstehen, die nur eine Bedingun
dritter Klasse (d. h. also nur eine überschüssige Linie
und dabei die Eigenschaft haben, dafs zwischen eine
ihrer Punkte und allen übrigen Punkten Linien beste
hen, deren Richtung, wenigstens einseitig, festgelegt is
Einfache Beispiele solcher Figuren sehen wir in **Fig. 8**
und **Fig. 9.** vor uns.

Wir wollen diese Art von Figuren etwas näher betrach
ten, sie vorerst aber zur Abkürzung mit dem Namen Cen
tral-Systeme belegen. So wären also **Fig. 8.** und 9
mit allen ihren Punkten und Linien Central-Systeme. —
In **Fig. 12.** bildeten die Punkte 3; 4; 11; 10 mit ihre
sechs Verbindungslinien ein Central-System. — Nähme
wir aber zu diesen vier Punkten noch die Punkte 9; 5;
hinzu, so bilden diese sieben Punkte mit ihren dreizehn Li
nien kein Central-System, weil sie nach dem Vorigen nich
eine, sondern zwei Bedingungen dritter Klasse haben. —
Eben so bilden die Punkte 1; 2; 6; 5; 8; 7 kein Central
System, weil sie zwar eine Bedingung dritter Klasse, abe
keinen Punkt haben, von dem nach allen übrigen ein
Linie besteht.

In Beziehung auf die Eigenschaften solcher Central
Systeme bemerken wir nun Folgendes.

1) Wenn p Punkte ein Central-System bilden, so müs
sen in einem derselben, den wir den Haupt-Punkt nen
nen wollen, $p-1$ Linien zusammentreffen, die wir Strah

n nennen wollen; in allen übrigen (Neben-Punkten) er müssen drei Linien zusammentreffen. — Das erste gt unmittelbar aus der Definition, das zweite daraus, dafs ch n. 58 die Anzahl der Linien des Systemes $= 2p-2$ n mufs, da nur eine Bedingung dritter Klasse statt findet. ese $2p-2$ Linien haben nämlich $4p-4$ Endpunkte, und il $p-1$ davon schon in dem Haupt-Punkte versammelt d, so müssen sich die $3p-3$ übrigen Endpunkte auf die rigen $p-1$ Punkte des Systemes vertheilen, und zwar gleichen Theilen, weil sonst isolirte Punkte entstän- n, gegen die Voraussetzung. — Wir hätten also z. B. **Fig. 12.** der Verbindung von dreizehn Linien zwischen n sieben Punkten 3; 4; 11; 10; 9; 5; 6 gleich anse- n können (ohne zu zählen oder zu rechnen), dafs sie in Central-System sey, indem in den Punkten 3 und 10 desmal vier Linien zusammentreffen; dagegen hätten wir er gleich gesehen, dafs durch Tilgung der Linie $\overset{3}{\cdot}\overset{10}{\cdot}$ ein ntral-System mit dem Haupt-Punkte 4 entsteht.

2) Die eine Bedingung dritter Klasse, welche für ein entral-System statt findet, läfst sich nun nicht nur in ei- r geschlossenen Gleichung, sondern auch in einer ausge- ichnet bequemen Form darstellen. Die $p-1$ vom aupt-Punkte ausgehenden Strahlen sind nämlich in ihren ndpunkten nothwendig durch die $p-2$ Verbindungs-Li- en verknüpft, die vom ersten Nebenpunkte zum zweiten, m zweiten zum dritten, und endlich vom vorletzten zum tzten gehen. Es bestehen also $p-2$ Dreiecke, vermit- lst welcher man das Verhältnifs des ersten Strahles zum tzten ausdrücken kann, indem man schrittweise vom er- en zum zweiten, vom zweiten zum dritten und sofort zum tzten Strahl übergeht, und diese Verhältnisse zusammen- etzt.

Dasselbe Verhältnifs zwischen dem ersten und letzt
Strahle läfst sich aber auch unmittelbar finden. Denn zw
chen diesen beiden Strahlen und der noch nicht betracht
ten (überschüssigen) Linie, die zwischen dem letzten u
ersten Nebenpunkte statt finden mufs, damit auch sie die d r
Linien haben, welche ihnen nach dem Vorigen gehöre
besteht auch ein Dreieck. — (Es bedarf wohl keiner E
innerung, dafs die an sich willkührliche Ordnung, in we
cher wir die Punkte hierbei zählen, eine ganz andere se
kann als die, in welcher die Punkte von links zu rechts au
einander folgen.)

Die Bedingung für die Verträglichkeit der Winkelb
obachtungen ist also durch die Gleichung darzustelle
welche zwischen den beiden Ausdrücken eines und desse
ben Verhältnisses statt findet. — Mit Vorbehalt, auf die
Darstellung zurück zu kommen, bemerken wir hier nur noc
dafs wir schon oben §. 66. und 68. Beispiele davon hatten.

3) Das System von vier Punkten, die durch 6 Linie
verbunden sind, ist nach dem vorigen §. das einfachste, we
ches überhaupt eine Bedingung dritter Klasse giebt, u
also auch das einfachste Central-System. Dieses einfachs
System zeichnet sich nun aber vor allen übrigen Central-Sy
stemen dadurch aus, dafs jeder beliebige seiner Punkte zu
Haupt-Punkte gewählt werden kann, weil bei ihm p —
selbst $= 3$ ist. Dies hat denn weiter die Folge, dafs i
einem solchen Systeme von vier Punkten die Bedingung a
vier verschiedene Weisen in einer Gleichung ausgedrück
werden kann. Es bleibt dann nur die Frage, welcher vo
diesen theoretisch gleichwerthigen Ausdrücken in practische
Beziehung vorzuziehen ist. Wir werden darauf im folge
den §. zurückkommen.

Der practisch vortheilhafte Umstand, dessen oben erhnt ist, besteht also darin, dafs gewöhnlich unsere trigometrischen Systeme sich in Central-Systeme zerlegen las-, wodurch alsdann nicht nur die Aufsuchung erleichtert, ıdern auch eine sehr bequeme Darstellung gewonnen wird. ies sind die *Beiträge* u. s. w. *S.* 166. erwähnten „gewöhnhsten" Fälle.)

Mit Rücksicht auf das eben Vorgetragene haben wir also die Aufsuchung, nach vorläufiger Ausscheidung der va vorkommenden fremden Punkte, zuerst die isolirten nkte wegzulassen, so wie auch die, welche dadurch wier isolirt werden, sodann die Central-Systeme nach und ch aufzusuchen, und nach ihrer Benutzung eine Linie in ıen als überschüssig wegzulassen. — Wie aber weiter verfahren ist, wenn überdies nun noch, ungewöhnlicher eise, Linien-Systeme übrig bleiben, die nicht central d, darüber läfst sich keine specielle Regel geben. Wir rden also in solchen ungewöhnlichen Fällen uns an die gemeinen §. 81. angegebenen Principien halten, und imr zuerst diejenigen Linien aufsuchen müssen, die wir nach n jedesmaligen Umständen am vortheilhaftesten als überhüssig betrachten können, um entweder ihr Verhältnifs gen eine andere Linie doppelt zu berechnen, oder aber um ischen einem gemessenen Winkel und dem statt seiner rechneten einen Widerspruch zu suchen. — Ich gestehe, fs mir noch kein einziger solcher ungewöhnlicher Fall in r wirklichen Praxis vorgekommen ist.

§. 89.

Es ist im vorigen §. schon bemerkt, dafs sich in den ewöhnlichsten Fällen alle Bedingungen dritter Klasse in hr bequemen Formen darstellen lassen, und dafs in Aus-

nahmsfällen dann nur noch die Frage ist, wie die Bedi
gungen der Figur, welche nach Absonderung der Centra
Systeme übrig bleibt, dargestellt werden können.

Man wird also gemeiniglich zweckmäfsig für die Ce
tral-Systeme die Darstellung gleich mit der Aufsuchung ve
binden und deshalb wollen wir nun erst, ehe wir zu Be
spielen übergehen, auch über die Darstellung für Centra
Systeme gleich das Nöthige beibringen.

Hier haben wir Folgendes zu merken:

1) die Gleichung, durch welche wir die Bedingung ein
Central-Systemes ausdrücken können, stellt sich am übe
sichtlichsten in der von Gauss eingeführten Form da
Hiernach drückt man zuerst die Quotienten je zweier a
einander folgenden Strahlen, so wie sie sich aus allen z
Benutzung kommenden Dreiecken ergeben, dergestalt au
dafs derselbe Strahl das einemal als Zähler, und das ander
mal als Nenner erscheint, und setzt dann das Produkt di
ser Quotienten = 1. Hernach kann man dann diese L
nien-Quotienten durch Quotienten von Sinussen der gege
überliegenden Winkel ersetzen. Wir wollen das aber jet
noch nicht weiter verfolgen, sondern nur daran erinner
dafs wir es schon im vorigen Abschnitte so gemacht haben.

2) Bei dem Uebergange von den Strahlen-Quotien
ten auf die Sinus-Quotienten gewährt es uns eine Bequem
lichkeit, wenn wir die Sinus wirklich gemessener Winkel i
die Formel bekommen. Deshalb werden wir in einem Cen
tral-Systeme von vier Punkten, wo an einem Punkte kein
Winkel gemessen sind, wenn nicht entschiedene Gründe fü
das Gegentheil vorliegen sollten, gern gerade denjenige
Punkt zum Haupt-Punkte wählen, wo keine Winkel ge
messen sind. — Dies ist der Grund, weshalb wir §. 68
unsere eine Bedingung dritter Klasse auf die Form

$$\frac{4.1}{4.2} \cdot \frac{4.2}{4.3} \cdot \frac{4.3}{4.1} = 1$$

tzten. — Nothwendig ist es aber keineswegs, dafs wir verfahren. Hätten wir z. B. **Fig. 9.** den Punkt 1 zum aupt-Punkte gewählt, und somit die Bedingung in der Form

$$\frac{1.2}{1.3} \cdot \frac{1.3}{1.4} \cdot \frac{1.4}{1.2} = 1$$

rgestellt, so würde unsere Uebersetzung in Sinus gewen seyn;

$$\frac{\sin {}^{1}_{3}{}^{2}}{\sin {}^{3}_{2}{}^{1}} \cdot \frac{\sin\left({}^{4}_{3}{}^{1} + {}^{3}_{1}{}^{4}\right)}{\sin {}^{4}_{3}{}^{1}} \cdot \frac{\sin {}^{4}_{2}{}^{1}}{\sin\left({}^{4}_{2}{}^{1} + {}^{2}_{1}{}^{4}\right)} = 1$$

ffenbar ist aber diese Form für die weitere Bearbeitung weger bequem, als die §. 68. gebrauchte.

3) Im Allgemeinen bleibt uns, wie gesagt, bei einem entral-Systeme von 4 Punkten die Wahl des Hauptpunks frei. Sind aber die 4 Dreiecke, von denen nur drei zur enutzung kommen, an Gestalt auffallend verschieden, so erden wir, selbst mit Aufopferung an Bequemlichkeit, imer gut thun, die Darstellung so vorzunehmen, dafs dasnige Dreieck mit zur Benutzung kommt, welches die spiesten Winkel enthält; denn dadurch erhalten wir bei den nus die gröfsten Differenzen und somit in den endlichen edingungsgleichungen die gröfsten Coefficienten. Wir ählen also in solchen Systemen wie **Fig. 9.** vorzugsweise enjenigen Punkt zum Haupt-Punkte, welcher mit der genüberliegenden Diagonale das kleinste Dreieck macht, und ben so in Fällen, wo der vierte Punkt innerhalb des Dreikes der drei anderen liegt, diesen inneren Punkt.

§. 90.

Wir wollen nun an Beispielen das Vorige zur Aus übung bringen.

1) Zuerst nehmen wir die **Fig. 12.** vor, die gerad zu diesem Zwecke eingerichtet ist.

Wie oben schon erwähnt, tilgen wir zuvörderst de isolirten Punkt 12 mit seinen beiden Linien $\overset{7\cdot 12}{\cdot\ \cdot}$ und $\overset{8\cdot 12}{\cdot\ \cdot}$ bemerken dann, dafs dadurch kein weiterer Punkt isoli wird, zählen nun 11 Punkte und 27 Linien und wissen dan also aus n. 58, dafs wir acht Bedingungen dritter Klass finden müssen.

Dann fangen wir damit an, die vierpunktigen (dreistrah ligen) Central-Systeme als die einfachsten aufzusuchen, un finden deren gleich zwei. Wir können dafür also nun zwe Gleichungen ansetzen, und treffen jedesmal die Wahl zwi schen den vier gleichbedeutenden Formen, so wie am End des vorigen §. angezeigt ist. So haben wir nun:

$$1)\quad \frac{\overset{3\cdot 2}{\cdot\ \cdot}}{\overset{3\cdot 1}{\cdot\ \cdot}} \cdot \frac{\overset{3\cdot 1}{\cdot\ \cdot}}{\overset{3\cdot 6}{\cdot\ \cdot}} \cdot \frac{\overset{3\cdot 6}{\cdot\ \cdot}}{\overset{3\cdot 2}{\cdot\ \cdot}} = 1$$

$$2)\quad \frac{\overset{3\cdot 11}{\cdot\ \cdot}}{\overset{3\cdot 10}{\cdot\ \cdot}} \cdot \frac{\overset{3\cdot 10}{\cdot\ \cdot}}{\overset{3\cdot 4}{\cdot\ \cdot}} \cdot \frac{\overset{3\cdot 4}{\cdot\ \cdot}}{\overset{3\cdot 11}{\cdot\ \cdot}} = 1$$

Nun bemerken wir, dafs wir in jedem der beiden ebe betrachteten Systeme eine Linie als überschüssig tilgen kön nen, um unsere weitere Untersuchung zu vereinfachen Welche Linie wir tilgen wollen, ist im Grunde theoretisch gleichgültig, aber in practischer Hinsicht kommt es sehr darauf an, die Tilgung so einzurichten, dafs wir die fol genden Partial-Figuren und namentlich die Central-System möglichst vereinfachen, vor allem uns aber hüten, kein fol gendes Central-System zu zerstören. Wie diese Einrich tung zweckmäfsig zu treffen sey, müssen die jedesmaligen Umstände entscheiden. (Wenn uns dabei die Uebersich

hwierig wird, so helfen wir uns durch leichte Zeichnun-
en, die wir nöthigenfalls nach jeder Tilgung uns durch-
echen).

Wir beschliefsen nun diesmal $\frac{1\cdot 3}{\cdot\,\cdot}$ und $\frac{3\cdot 10}{\cdot\,\cdot}$ zu tilgen,
eil sich dadurch zwei Central-Systeme, das fünfstrahlige
n den Punkt 1, und das sechsstrahlige um 3, zu vier-
rahligen vereinfachen, und haben nun, mit letzterem an-
ngend:

$$3)\quad \frac{3.2}{3.11}\cdot\frac{3.11}{3.4}\cdot\frac{3.4}{3.6}\cdot\frac{3.6}{3.2}=1$$

ier tilgen wir nun als überschüssig die Linie $\frac{2\cdot 11}{\cdot\,\cdot}$, weil jede
ıdere, die wir sonst tilgen könnten, eines unserer Central-
ysteme um 1; 4 oder 6 zerstören würde.

Eben so gehen wir nun bei dem vierstrahligen Central-
ysteme um 1 zu Werke. Wir erhalten:

$$4)\quad \frac{1.2}{1.6}\cdot\frac{1.6}{1.5}\cdot\frac{1.5}{1.7}\cdot\frac{1.7}{1.2}=1$$

ıd tilgen nun aus dem eben angeführten Grunde die Linie $\frac{7\cdot 2}{\cdot\,\cdot}$.

Jetzt gehen wir nun zu dem fünfstrahligen Central-Sy-
eme um den Hauptpunkt 6 über. Wir bekommen:

$$5)\quad \frac{6.1}{6.2}\cdot\frac{6.2}{6.3}\cdot\frac{6.3}{6.4}\cdot\frac{6.4}{6.5}\cdot\frac{6.5}{6.1}=1$$

ıd tilgen nun $\frac{2\cdot 3}{\cdot\,\cdot}$, weil wir die sechsstrahligen Central-Sy-
eme um 4 und 5 noch schonen müssen und nun auch schon
erken, dafs der linke untere Theil der Figur uns noch ein
icht centrales System übrig lassen wird; weshalb wir $\frac{6.2}{\cdot\,\cdot}$
weckmäfsig schonen, weil wir noch nicht wissen, ob und
ie wir diese Linie noch zu brauchen haben könnten.

Nehmen wir nun zunächst das sechsstrahlige Central-
ystem um 4 vor, so haben wir:

$$6)\quad \frac{4.3}{4.11}\cdot\frac{4.11}{4.10}\cdot\frac{4.10}{4.9}\cdot\frac{4.9}{4.5}\cdot\frac{4.5}{4.6}\cdot\frac{4.6}{4.3}=1$$

Hier sehen wir nun, dafs wir mit gleichem Vortheile

eine der 7 Linien tilgen können, welche nicht zu dem Cen tral-Systeme um 5 gehören. Tilgen wir z. B. $\overset{4.10}{\cdot\,\cdot}$, so wi nun 10 isolirt, mufs also nebst den Linien $\overset{11.10}{\cdot\,\cdot}$ und $\overset{9.10}{\cdot\,\cdot}$ auc getilgt werden. Dadurch wird nun 11 auch isolirt. Tilge wir nun aber auch 11 mit seinen beiden Linien, so wird da durch auch 3 isolirt, folglich fallen nun auch die Linie $\overset{4.3}{\cdot\,\cdot}$ und $\overset{6.3}{\cdot\,\cdot}$ weg.

Jetzt wenden wir uns nun zu dem sechsstrahligen Cen tral-Systeme um 5, erhalten so:

$$7)\quad \frac{\overset{5.1}{\cdot\,\cdot}}{\overset{5.6}{\cdot\,\cdot}} \cdot \frac{\overset{5.6}{\cdot\,\cdot}}{\overset{5.4}{\cdot\,\cdot}} \cdot \frac{\overset{5.4}{\cdot\,\cdot}}{\overset{5.9}{\cdot\,\cdot}} \cdot \frac{\overset{5.9}{\cdot\,\cdot}}{\overset{5.8}{\cdot\,\cdot}} \cdot \frac{\overset{5.8}{\cdot\,\cdot}}{\overset{5.7}{\cdot\,\cdot}} \cdot \frac{\overset{5.7}{\cdot\,\cdot}}{\overset{5.1}{\cdot\,\cdot}} = 1$$

und sehen auch gleich, dafs nun noch die Punkte 9 und wegfallen, wenn wir irgend eine beliebige von den Linie tilgen, welche aufserhalb des Winkels $\overset{8}{\cdot}\overset{6}{\cdot}$ liegen.

Nun ist uns endlich noch das System **Fig. 18.** übri geblieben, was nicht mehr central ist. Wir zählen zu Sicherheit erst die Punkte und Linien dieses Systemes un finden $p = 6$; $l = 10$; haben also $l - 2p + 3 = 1$, wie auch seyn mufste, wenn wir bis jetzt richtig gearbeitet ha ten. — In diesem Systeme haben wir also unsere acht und letzte Bedingung zu suchen. — Wir sehen aber gleic ein, dafs wir zu einer Darstellung in einer geschlossene Gleichung hier nicht bequem gelangen, und wollen uns als die weitere Bearbeitung für den nächsten §. vorbehalten.

2) Gesetzt es wäre uns die **Fig. 13.** ursprünglich vo gegeben gewesen und wir wollten darin die Bedingunge dritter Klasse suchen; so hätten wir zuerst wieder $p = 1$ und $l = 21$; also sind nach §. 87. vier Bedingungen dri ter Klasse zu suchen.

Suchen wir nun zuerst, weil keine isolirten Punkte vo handen sind, nach Central-Systemen, so haben wir nur e nes, also

$$1)\quad \frac{3.11}{3.10}\cdot\frac{3.10}{3.4}\cdot\frac{3.4}{3.11}=1$$

un müssen wir eine der Linien dieses Systemes tilgen, wozu ir wohl am zweckmäfsigsten die Linie $\overset{3\cdot 10}{\cdot\ \cdot}$ wählen, um uns ie spitzen Winkel des Dreieecks 3, 4, 11 für den folgenden ebrauch aufzuheben.

Jetzt haben wir also einen geschlossenen Dreieckskranz, i welchem nun noch 3 Bedingungen enthalten seyn müssen. ine von diesen Bedingungen finden wir wieder sehr leicht arstellbar; denn wir sehen, dafs die Seitenverhältnisse sich och eben so in eine Gleichung bringen lassen wie bei Cenal-Systemen, nur dafs wir keinen festen Haupt-Punkt arin haben, sondern von einem zum anderen fortschreiten üssen. So erhalten wir also die Gleichung:

$$2)\quad \frac{1.7}{1.2}\cdot\frac{1.2}{3.2}\cdot\frac{3.2}{3.11}\cdot\frac{3.11}{4.11}\cdot\frac{4.11}{4.10}\cdot\frac{4.10}{4.9}\cdot\frac{4.9}{5.9}\cdot\frac{5.9}{5.8}\cdot\frac{5.8}{5.7}\cdot\frac{5.7}{1.7}=1$$

ie beiden nun noch zu suchenden Bedingungsgleichungen üssen in einer Figur enthalten seyn, welche entsteht, wenn ir wieder eine Linie tilgen. Wählen wir dazu z. B. die Lie $\overset{4\cdot 10}{\cdot\ \cdot}$, so wird nun 10 isolirt; wir können also auch $\overset{10\cdot 11}{\cdot\ \cdot}$ nd $\overset{10\cdot 9}{\cdot\ \cdot}$ tilgen und müssen dann unsere beiden letzten Bingungen in der **Fig. 19.** suchen. — Eben so würden ir einen Punkt weniger erhalten haben, wenn wir $\overset{5\cdot 8}{\cdot\ \cdot}$ gelgt und somit 8 isolirt hätten. — Die Tilgung irgend eier anderen Linie würde uns nur ein Viereck statt zweier reiecke, oder ein Fünfeck statt des vorhandenen Viereckes die Figur gebracht, die Berechnung also erschwert, aber einen Punkt isolirt haben. — Wir haben nun in **Fig. 19.** Punkte und 17 Linien also zwei Bedingungen dritter Klasse, ie es seyn mufs; sehen aber auch hier gleich, dafs wir ieselben nicht bequem in einer geschlossenen Gleichung arstellen können, und verschieben also die weitere Bearbeitung auch zum folgenden §.

§. 91.

Nachdem nun im Vorigen alles abgehandelt ist, was sich auf Abzählung, Aufsuchung und, für die Centralsysteme, auch auf leichte Darstellung der Bedingungen bezieht; so bleibt uns, für den Ansatz der Bedingungsgleichungen dritter Klasse selbst, nur noch Weniges zu bemerken übrig.

Für die Central-Systeme sehen wir nämlich gleich, dafs uns die zweite Methode des §. 82. am schnellsten zum Ziele führt. Wir werden also die dargestellten endlichen Gleichungen erst in Sinus übersetzen, dann sie in dieser Form scharf berechnen, und bei der Gelegenheit die Differenzen der Logarithmen gleich mit gebrauchen, um die Coefficienten der jedesmaligen Bedingungsgleichung zugleich mit den Widersprüchen zu erhalten. Wie dabei zu verfahren ist, haben wir schon öfters, und namentlich noch §. 82. an Beispielen nachgewiesen, und brauchen wir uns hier also nicht mehr dabei aufzuhalten.

Wir bemerken nur, dafs dasselbe Verfahren eintritt, wenn, wie in dem zweiten Beispiele des vorigen §., bei einem nicht centralen Systeme auch eine Bedingungsgleichung sich findet, welche sich nach Art der Central-Systeme auf Quotienten-Producte bringen läfst.

Endlich erinnern wir uns, im Rückblick auf §. 58., dafs bei ernstlicher Anwendung es sich nur von sogenannten unendlich kleinen Verbesserungen handelt, und dafs also die Coefficienten, die wir hier aus beobachteten Winkeln berechnen, in fast ausnahmsloser Regel genau so gefunden werden, als ob sie aus den ausgeglichenen Winkeln selbst berechnet wären.

Es bleibt uns also nur noch die Frage übrig, wie wir in den ungewöhnlichen Fällen verfahren sollen, wo wir aufser den Central-Systemen noch andere Systeme übrig behalten.

In diesen Fällen, glaube ich, wird wohl immer nach r dritten Methode des §. 82. zu verfahren seyn; also st der Widerspruch an einer Richtung und somit sein Verltnifs zu einer Verbesserung zu berechnen und dann die rhältnisse je zweier Coefficienten der übrigen Verbesseugen zu bestimmen; wobei es mir am bequemsten scheint, ese beiden Arbeiten gerade in dieser Reihenfolge vorzuhmen, weil dann aus der ersten Rechnung, die doch jenfalls scharf zu machen ist, immer manches in der zweiı benutzt werden kann.

In den einzelnen Fällen wird freilich dies Verfahren h wohl auf sehr verschiedene Weise entwickeln lassen, und mir wenigstens bis jetzt keine specielle Vorschrift bekannt, e bei allen solchen Entwickelungen als durchgreifende Rel dienen könnte. Es scheint aber für diese doch verhältsmäfsig selten vorkommenden Fälle auch hinreichend, wenn ı an den beiden Beispielen des vorigen §. zeige, wie ich, ls sie mir so in der Praxis vorgekommen wären, verfahı haben würde, um sie zu Ende zu bringen.

Zu 1)

Wir hatten die **Fig. 18.** übrig behalten, mit 10 Lien und 6 Punkten, und suchen nun die eine (achte) dingungsgleichung, die uns zur Ausgleichung unserer **ig. 12.** noch fehlte. — Wir müssen nun zuerst uns entliefsen eine Linie (Richtung) als überschüssig zu bechten, um sie aus den übrigen zu berechnen. Dazu scheint er $\frac{2}{8}$ vorzugsweise geeignet. Denn nehmen wir an, alle rigen Bedingungsgleichungen seyen schon erfüllt, (oder s, was an ihrer Erfüllung noch fehlt, sey so unbedeutend, fs es für den Ansatz dieser einen Bedingungsgleichung, mit elcher wir uns hier beschäftigen, vernachlässigt werden nn,) so haben wir in den übrigen neun Linien ein Sy-

stem von vier an einander hängenden Dreiecken, worin al
les, was wir brauchen, sich sehr leicht scharf berechne
läfst.

Ferner müssen wir nach §. 87. eine der letzterwähn
ten neun Linien als der Gröfse und Richtung nach gege
ben betrachten. Es eignet sich dazu, aus Gründen, die so
gleich erhellen werden, vorzugsweise die Linie $\overset{1\cdot 5}{\cdot\ \cdot}$. Wi
haben also zu setzen: $\overset{1\cdot 5}{\cdot\ \cdot} = 1$ und $\frac{1}{5} = 0$ oder $\frac{5}{1} = 180$
und können dann vermittelst der beobachteten Winkel all
Linien der Dreiecke in der Längen-Einheit ausdrücken un
ihre Richtungen gegen die Abscissen-Linie scharf bestim
men. — Weiter können wir nun die Coordinaten de
Punkte 2 und 8 in Beziehung auf dieselbe Abscissen-Lini
und den Punkt 5 als Anfangspunkt nach den gewöhnliche
Regeln berechnen, haben somit also auch die berechnet
Richtung $\frac{2}{8}$. Dieselbe Richtung $\frac{2}{8}$ ist aber auch beobach
tet, weil die Winkel $\overset{7}{\cdot}\overset{2}{\cdot}$; $\overset{2}{\cdot}\overset{5}{\cdot}$ u. s. w. gemessen sind. Se
tzen wir also w_8 = Beobachtet $\frac{2}{8}$ — Berechnet $\frac{2}{8}$, so habe
wir endlich:

$$0 = w_8 + \left(\tfrac{2}{8}\right)$$

Dieses ist also eine Specialisirung der gesuchten allgemeine
Bedingungsgleichung, und somit wäre eines der beiden Ge
schäfte, welche die dritte Methode erfordert, vollendet.

Für das zweite Geschäft haben wir nun erst zu unter
suchen, wie viele Verbesserungen überhaupt in unserer Be
dingungsgleichung vorkommen, und sodann, wie sie sich paa
weise zu einander verhalten müssen, damit die entsprechen
den $o + v$ unter einander und mit den übrigen o verträg
lich seyen.

Was das erste betrifft, so dürfen wir an der Richtun
$\frac{1}{5}$ und $\frac{5}{1}$ nichts ändern, was wir nicht etwa auch an alle
übrigen zu ändern entschlossen wären, weil wir $\overset{1\cdot 5}{\cdot\ \cdot}$ zur Grund

ge aller Richtungen genommen haben. Demnach können r 9 Richtungs-Verbesserungen in der gesuchten Bedingungsgleichung überhaupt vorkommen und sind also nur ht Coefficienten-Verhältnisse, d. h. acht Specialisirungen der allgemeinen Bedingungsgleichung für je zwei Verbesserungen zu suchen.

Was das zweite betrifft, so können wir zu den fraglichen Verhältnissen in diesem Falle ziemlich leicht mit Hülfe r Punkte gelangen, in welchen nur drei Richtungen zusammentreffen. (Diese sparten wir uns vorher deshalb absichtlich auf, indem wir $\overset{1}{\cdot}\overset{\cdot}{\cdot}\overset{5}{\cdot}$ zur Abscissenlinie nahmen.)

Denken wir uns nämlich zuerst blofs $\frac{2}{8}$ und $\frac{5}{8}$ (nebst den ntgegengesetzten Richtungen) als veränderlich und, da le übrigen Richtungen unveränderlich seyn sollen, den unkt 8 allein in der Richtung $\frac{8}{7}$ bewegt, so dafs er **Fig. 20.** is 8 in 8* rückt, so können wir die, als unendlich klein zu enkende Linie $\overset{8}{\cdot}\overset{\cdot}{\cdot}\overset{8^*}{\cdot}$ doppelt ausdrücken, sowohl durch das nendlich kleine Dreieck 8, 2, 8* als auch durch 8*, 5, 8. Wir erhalten also das Verhältnifs $(\frac{2}{8}) : (\frac{5}{8})$ vermittelst der Gleichung:

$$(\tfrac{2}{8}) \cdot \frac{\overset{2}{\cdot}\overset{\cdot}{\cdot}\overset{8}{\cdot}}{sin\,\overset{7}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{\cdot}{\cdot}\,\overset{\cdot}{\cdot}\,\overset{8}{\cdot}} = (\tfrac{5}{8}) \cdot \frac{\overset{5}{\cdot}\overset{\cdot}{\cdot}\overset{8}{\cdot}}{sin\,\overset{7}{\cdot}\,\overset{5}{\cdot}\,\overset{\cdot}{\cdot}\,\overset{\cdot}{\cdot}\,\overset{8}{\cdot}}$$

ringen wir diese Gleichung auf 0 und dividiren mit dem Coefficienten von $(\frac{2}{8})$, weil in der obigen Specialisirung zu iner Verbesserung: $0 = w_s + (\frac{2}{8})$, die letzte Gröfse den Coefficienten 1 hat; so kommt uns die erste Specialisirung zu wei Verbesserungen:

$$1) \qquad 0 = +(\tfrac{2}{8}) - (\tfrac{5}{8}) \frac{\overset{5}{\cdot}\overset{\cdot}{\cdot}\overset{8}{\cdot}}{\overset{2}{\cdot}\overset{\cdot}{\cdot}\overset{8}{\cdot}} \cdot \frac{sin\,\overset{7}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot}}{sin\,\overset{7}{\cdot}\,\overset{5}{\cdot}}$$

Ganz eben so erhalten wir, wenn der Punkt 8 in der bleibenden Richtung $\frac{5}{8}$ bewegt gedacht wird:

$$2)\quad 0 = +\binom{2}{8} - \binom{7}{8}\frac{\overset{\cdot}{7}.\overset{\cdot}{8}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^2\frac{5}{8}}{\sin^7\frac{5}{8}}$$

Gehen wir nun zu dem Punkte 2 über, und verfahren dor eben so, so kommen uns die beiden Specialisirungen:

$$3)\quad 0 = +\binom{2}{8} - \binom{2}{1}\frac{\overset{\cdot}{2}.\overset{\cdot}{1}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^6\frac{8}{2}}{\sin^6\frac{1}{2}}$$

$$4)\quad 0 = +\binom{2}{8} - \binom{2}{6}\frac{\overset{\cdot}{2}.\overset{\cdot}{6}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^8\frac{1}{2}}{\sin^6\frac{1}{2}}$$

Jetzt können wir nun mit $\binom{2}{8}$ nichts mehr unternehmen, wi müssen also nun eine der eben schon damit verglichene Gröfsen zur weiteren Vergleichung benutzen, und also zunächst suchen $\binom{7}{8}:\binom{5}{7}$ und $\binom{7}{8}:\binom{1}{7}$ mit Hülfe des Punktes 7 Das erste giebt uns unmittelbar:

$$\binom{7}{8} \cdot \frac{\overset{\cdot}{7}.\overset{\cdot}{8}}{\sin^1\frac{8}{7}} = \binom{5}{7} \cdot \frac{\overset{\cdot}{5}.\overset{\cdot}{7}}{\sin^1\frac{5}{7}}$$

Diese Gleichung mufs nun auch auf 0 gebracht werden, zugleich aber mufs dem $\binom{7}{8}$ derjenige Coefficient verschafft werden, den es in der früheren Specialisirung 2) schon hatte Dadurch erhalten wir:

$$5)\quad 0 = -\binom{7}{8}\frac{\overset{\cdot}{7}.\overset{\cdot}{8}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^2\frac{5}{8}}{\sin^7\frac{5}{8}} + \binom{5}{7}\frac{\overset{\cdot}{5}.\overset{\cdot}{7}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^1\frac{8}{7}}{\sin^1\frac{5}{7}} \cdot \frac{\sin^2\frac{5}{8}}{\sin^7\frac{5}{8}}$$

und eben so

$$6)\quad 0 = -\binom{7}{8}\frac{\overset{\cdot}{7}.\overset{\cdot}{8}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^2\frac{5}{8}}{\sin^7\frac{5}{8}} - \binom{1}{7}\frac{\overset{\cdot}{1}.\overset{\cdot}{7}}{\underset{\cdot}{2}.\underset{\cdot}{8}} \cdot \frac{\sin^5\frac{8}{7}}{\sin^1\frac{5}{7}} \cdot \frac{\sin^2\frac{5}{8}}{\sin^7\frac{5}{8}}$$

Wenden wir uns nun zuletzt zum Punkte 6, vergleichen $\binom{2}{6}$ mit den beiden noch übrigen Richtungs-Veränderungen und sorgen, dafs sein Coefficient mit dem in der Specialisirung 4) übereinstimme, so bekommen wir endlich:

$$) \quad 0 = -\binom{2}{6} \cdot \frac{\overset{2.6}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^8 \frac{1}{2}}{\sin^6 \frac{1}{2}} - \binom{6}{5} \frac{\overset{6.5}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^1 \frac{2}{6}}{\sin^5 \frac{1}{6}} \cdot \frac{\sin^8 \frac{1}{2}}{\sin^6 \frac{1}{2}}$$

$$) \quad 0 = -\binom{2}{6} \cdot \frac{\overset{2.6}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^8 \frac{1}{2}}{\sin^6 \frac{1}{2}} + \binom{6}{1} \frac{\overset{6.1}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^5 \frac{2}{6}}{\sin^5 \frac{1}{6}} \cdot \frac{\sin^8 \frac{1}{2}}{\sin^6 \frac{1}{2}}$$

ıs diesen Specialisirungen, die, wie schon bemerkt, hier nur die Stelle der im §. 58. verlangten partiellen Differentiirun- n getreten sind, läfst sich nun ohne Weiteres die verlangte ·dingungsgleichung zusammenschreiben. Wir erhalten so:

$$= w_8 + \binom{2}{8} - \binom{5}{8} \cdot \frac{\overset{5.8}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^7 \frac{2}{8}}{\sin^7 \frac{5}{8}} - \binom{7}{8} \frac{\overset{7.8}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{5}{8}}{\sin^7 \frac{5}{8}} - \binom{2}{1} \frac{\overset{2.1}{\cdot\,\cdot}}{\underset{\cdot\,\cdot}{2.8}} \cdot \frac{\sin^6 \frac{8}{2}}{\sin^6 \frac{1}{2}}$$

— u. s. w.

ein Rechnungs-Beispiel lasse ich nicht abdrucken, weil ı es dem Leser selbst überlassen kann, sich ein solches zu twerfen, wozu es genügt, beliebige Winkel in den vier eiecken anzunehmen, $\frac{7}{8}\frac{2}{5}$ dann daraus scharf zu berech- n und endlich vorauszusetzen, dafs ein dem berechneten her Werth beobachtet sey. Man überzeugt sich auf diese eise leicht, dafs die Rechnung für die Coefficienten nicht weitläufig ausfällt, als es auf den ersten Blick scheinen öchte, indem die bei der scharfen Berechnung des Wider- ruches benutzten Logarithmen grofsentheils unmittelbar eder gebraucht werden, und alles übrige ohnehin nur mit 5 ecimalen gerechnet zu werden braucht.

Zu 2)

Wir hatten die **Fig. 19.** mit 9 Punkten und 17 Linien rig behalten und haben darin also noch zwei Bedin- ngsgleichungen (die dritte und vierte) zu suchen. In- m wir die übrigen Bedingungen als erfüllt voraussetzen, üssen wir also noch zwei Linien (Richtungen) als über- hüssig betrachten. Es scheint zweckmäfsig, dazu $\frac{3}{4}$ und zu wählen, und diese Richtungen in Beziehung auf die Li-

nie $\frac{1 \cdot 6}{\cdot\,\cdot}$, welche wir wieder $= 1$ setzen und als Abscisse Linie betrachten, scharf zu berechnen, wie wir es im vorige Beispiele auch machten. So erhielten wir also

für die dritte Bedingungsgleichung $0 = w_3 + \binom{3}{4}$
- - vierte - $0 = w_4 + \binom{11}{4}$

Der Vorschlag, die an sich willkührliche Wahl gera auf diese Linien zu richten, gründet sich auf das Bestrebe so viele dreistrahlige Punkte als möglich zur Erforschun der Coefficienten-Verhältnisse aufzusparen.

Nehmen wir nun erst die dritte Bedingungsgleichun allein vor, so haben wir also $\frac{11}{4}$ wegzudenken und somit auc den nunmehr isolirten Punkt 11. Wir behalten also noc 8 Punkte mit 14 Linien für unsere dritte Bedingungsglei chung. Nun müssen wir wieder $\frac{1}{5}$ als gegebene Fundamen tal-Richtung unveränderlich setzen, haben also 13 Rich tungs-Verbesserungen in der verlangten Bedingungsglei chung und also noch 12 Verhältnisse (Specialisirungen un serer Gleichung) zu suchen. Zehn von diesen finden wi leicht vermittelst der dreistrahligen Punkte, ganz so wie i vorigen Beispiele. Wir bekommen nämlich, wenn wir un ten herumzählen, sogleich die 6 Verhältnisse

$$\binom{3}{4} : \binom{4}{9} \qquad \binom{4}{9} : \binom{5}{9} \qquad \binom{5}{9} : \binom{8}{5}$$
$$\binom{3}{4} : \binom{4}{5} \qquad \binom{4}{9} : \binom{8}{9} \qquad \binom{8}{9} : \binom{8}{7}$$

und eben so finden wir 4 weitere Verhältnisse, wenn wi oben herumgehen, nämlich

$$\binom{3}{4} : \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{2} : \binom{2}{1}$$
$$\binom{3}{4} : \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} : \binom{7}{2}$$

Nun bleiben uns noch zwei Verhältnisse für $\binom{1}{7}$ und $\binom{5}{7}$ z suchen, wobei wir aber nicht verfahren können wie vorhe weil die entsprechenden Richtungen zwischen vierstrahlige

nkten liegen. — Hier würde ich nun einen Weg ein-
hlagen, der in solchen Fällen wenigstens immer sicher
m Ziele führt, wenn sich kein bequemerer auffinden läfst.
h würde nämlich erst die Hypothese machen, dafs
ofs die beobachtete Richtung $\frac{1}{7}$ sich um eine Minute
rgröfserte und in dieser Hypothese die scharfe Rechnung
r $\frac{3}{4}$ wiederholen. Von dem Werthe, den ich so für $\frac{3}{4}$ er-
elte, würde ich dann den früher (mit Zuziehung des be-
achteten $\frac{1}{7}$) berechneten Werth abziehen, und den
nterschied in Minuten ausdrücken. Gesetzt ich fände
q Minuten Unterschied, wo q also nach Umständen auch
gativ seyn kann; so hätte ich damit gleich $(\frac{1}{7}) : (\frac{3}{4}) = 1 : q$
so die gewünschte Specialisirung

$$0 = (\tfrac{3}{4}) - q\,(\tfrac{1}{7})$$

ben so wiederholte ich dann die scharfe Rechnung in der
ypothese, dafs blofs die beobachtete Richtung $\frac{5}{7}$ sich
n eine Minute vergröfserte, und fände so am Ende

$$0 = (\tfrac{3}{4}) - r\,(\tfrac{5}{7})$$

nd nun könnte ich die dritte Bedingungsgleichung ge-
ade so wie im vorigen Beispiele vollständig ansetzen.

Bei der Ausführung der zuletzt vorgeschlagenen Rech-
ungen findet sich übrigens noch eine namhafte Erleichte-
ung, auf welche doch hier noch aufmerksam zu machen
st. Wenn wir nämlich voraussetzen, dafs blofs $\frac{1}{7}$ sich än-
lere, so heifst das mit anderen Worten: wir nehmen an,
lafs nur die beiden Dreiecke 1, 5, 7 und 1, 7, 2 sich
ler Gestalt nach ändern, der Winkel $^{2}{}_{1}{}^{5}$ aber, so wie die
Gestalt aller übrigen Dreiecke unverändert bleibe. Wir
brauchen im Grunde also nur die beiden erstgenannten Drei-
ecke aufs Neue scharf zu berechnen und dadurch neue Wer-
the für $\overset{1\cdot 2}{\cdot\,\cdot}$ und $\overset{5\cdot 7}{\cdot\,\cdot}$ zu finden. Alsdann können wir durch

blofse Proportions-Rechnung die veränderten übrigen Linie und somit die veränderten Coordinaten finden, aus welche $\frac{8}{4}$ zu berechnen ist. — Ganz eben so würden wir, wen blofs $\frac{5}{7}$ als sich ändernd vorausgesetzt wird, nur die Dreieck 1, 5, 7 und 5, 8, 7 neu zu berechnen und dann, so wi oben angezeigt, fortzufahren haben.

Wie nun die vierte Bedingungsgleichung anzusetze sey, übersehen wir leicht. Wir tilgen also $\frac{3}{4}$ und stelle statt dessen den Punkt 11 mit seinen drei Linien wieder he Nun haben wir 9 Punkte und 16 Linien; also mufs unser Bedingungsgleichung 15 Richtungsverbesserungen enthal ten und wir haben also 14 Verhältnisse aufzusuchen. Zwöl dieser Verhältnisse finden wir wieder vermittelst der drei strahligen Punkte. Die beiden letzten $(\frac{1}{7}):(\frac{11}{4})$ und $(\frac{5}{7}):(\frac{11}{4}$ werden wir eben so zu suchen haben, wie bei der dritte Bedingungsgleichung. Endlich wird ein grofser Theil de hier gesuchten Verhältnisse, schon unmittelbar aus der vo rigen Rechnung für die dritte Bedingungsgleichung entnom men werden können.

§. 92.

Hier scheint es nun zweckmäfsig, erst noch einige Be merkungen beizufügen, die sich an das vorige unmittelba anschliefsen.

1) Wir haben im zweiten Beispiele des §. 66. voraus gesetzt, dafs in **Fig. 8.** der Punkt 6 erst nach Ausglei chung des übrigen Systemes von Punkten, welches in **Fig. 12.** vollständig angegeben ist, durch eine besondere Ausglei chung einzuschalten sey. Damals machten wir diese Vor aussetzung, um nur schnell ein Beispiel zu haben. Käme uns aber ein ähnlicher Fall in der Praxis wirklich vor, so würden wir nun einsehen, dafs jene Methode keinesweges

zweckmäfsigste wäre; denn wir hätten uns dadurch ei- Centralsystemes für die Ausgleichung des übrigen Ne- s beraubt und uns in allerlei Weitläufigkeiten für den An- z verwickelt.

2) Sehr selten wird in der Praxis der Fall eintreten, s man bei einer Triangulirung alle Richtungen, die man bachten kann, wirklich zu beobachten, und alle beobach- en zur Ausgleichung zu benutzen sich verpflichtet findet. r Aufwand an Zeit und Mühe, den dies erfordern würde, in der Regel viel zu bedeutend, als dafs er für die ge- hnlichen practischen Zwecke zu verantworten wäre. So B. liegt mir das Dreiecks-Netz einer Feldflur vor, welches einem meiner ehemaligen Zuhörer als Kataster-Geome- aufgenommen, 27 Bedingungsgleichungen zweiter und Bedingungsgleichungen dritter Klasse darbieten würde, nn alles Beobachtete ausgeglichen werden sollte. Diese zelne Feldflur würde also eine Rechen-Arbeit veranlassen, der meiner Haupttriangulirung (*Beiträge* §. 91.) ähn- wäre, ohne dafs dabei ein irgend erheblicher Nutzen ab- ehen wäre. — Es fragt sich also in solchen Fällen, wie uns einzurichten haben, um solche Weitläuftigkeit zu ver- iden und doch den Nutzen, den die Ausgleichungsrech- ig uns gewähren kann, nicht ganz zu verlieren?

Diese Frage können wir uns nun nach dem Vorstehen- wenigstens im Allgemeinen beantworten.

Wir werden vorerst für jede Figur nur gewisse Haupt- nkte aussuchen, zwischen denen wir die Winkel mit be- derer Sorgfalt messen, um sie demnächst der strengen sgleichung zu unterwerfen. Das System dieser Punkte rden wir sodann nach Vollendung seiner Ausgleichung absolut genau betrachten, die übrigen Punkte aber mittelst verhältnifsmäfsig weniger sorgfältig gemesse-

ner Winkel (und nach Gelegenheit partieller Ausgle
chungen) durch Einschaltung an jene anschliefse
So z. B. würden wir, wenn uns **Fig. 12.** vorgelegen hätt
erst recognoscirt haben, ob sich nicht, wenn auch etw
weiter entfernt, Punkte finden liefsen, die sich um d
Kirchthurm (6) zu einem Central-Systeme schlössen, u
deren System sich dann vermittelst der Strahlen auf d
Kirchthurm durch eine Bedingungsgleichung dritter Klas
mit Leichtigkeit ausgleichen liefse.

Ferner werden wir uns, so wie unsere Arbeit fortschre
tet, immer gegenwärtig zu halten haben, welche Beobac
tungen wir nothwendig machen müssen und welche wir übe
schüssig machen wollen, um die betreffenden Punkte fes
zulegen und uns den Grad der Sicherheit immer evident
erhalten. Für letztere werden wir dann, wo es die Un
stände irgend erlauben, solche wählen, bei denen die der
nächstige Ausgleichung möglichst bequem wird. So z.
würden wir **Fig. 12.**, wenn wir die Wahl gehabt hätte
entweder die Richtung $\frac{2}{8}$ oder statt ihrer $\frac{1}{8}$ zu beobachten, g
wifs das letzte vorgezogen haben, weil wir nun wissen, da
$\frac{2}{8}$ uns eine verdriefsliche Rechnung für den Ansatz verursach
statt dafs $\frac{1}{8}$ uns mittelst eines neuen vierpunktigen Centra
Systemes einen sehr bequemen Ansatz gegeben hätte.

Haben wir dann aber am Ende noch Beobachtung
übrig, die wir zur Ausgleichung nicht mit benutzten, so kö
nen diese nur eine sogenannte äufsere Prüfung gewä
ren, die nicht sowohl zu unserer Beruhigung über die Rich
tigkeit unserer Arbeit gereicht (vergl. §. 2.), denn letzte
suchen wir in unseren $[vv]$ u. s. w., als vielmehr uns a
zeigt, wie etwa eine fremde oder wiederholte Arbeit v
unseren ausgeglichenen Beobachtungen abweichen würd
Dies hat allerdings sein Angenehmes, und deshalb mag m

ch immerhin bei complicirten Haupt-Systemen eine oder
ige Richtungen zu solcher äufseren Prüfung aufsparen
ergl. *Beiträge* §. 66. 80. und 100.).

3) Was nun die schon öfter erwähnten Einschal-
ngen betrifft, so können bekanntlich entweder einzelne
nkte, oder einzelne Linien, oder ganze Linien-Systeme
ızuschalten seyn. Wir wollen dieses bei der Gelegenheit
en in Beziehung auf die dabei vorkommenden Ausgleichun-
n etwas genauer vornehmen. — In allen drei Fällen ge-
n wir davon aus, dafs ein vorher bearbeitetes Linien-
ichtungs-) System, dessen Punkten wir eine vorzügliche
ichtigkeit oder ihrer Beobachtung eine vorzügliche Ge-
uigkeit zuschreiben, nunmehr nach seiner Ausgleichung
; absolut genau betrachtet werde.

ı) Wollen wir nun einen einzelnen Punkt einschal-
ten, so kann das auf dreierlei Weise geschehen.

Entweder tritt dann der Fall ein, den wir am Ende
s §. 87. unter 1) bevorworteten, dafs wir blofs an ihm
inkel messen. Sollen hier die Vortheile der Ausglei-
ungs-Rechnung benutzt werden, so schneiden wir we-
gstens 4 Punkte an, die nicht in demselben Kreise mit
m einzuschaltenden Punkte liegen, reduciren die Be-
mmung der gegebenen Punkte auf rechtwinklige Coor-
naten, und rechnen dann nach den Regeln des zweiten
ɔschnittes, wie bei Gelegenheit der *Pothenot'schen Auf-
ıbe* näher ausgeführt ist.

Oder aber wir messen Winkel theils an dem ein-
schaltenden Punkte selbst, theils an Punkten des Haupt-
ɾstemes; dann ist er trigonometrisch mit dem letzteren ver-
ınden, und haben wir nur die Verbesserungen derjenigen
ichtungen, welche diesem allein angehören, = 0 zu se-
en, sonst aber eben so zu rechnen, wie in dem ganzen vo-

rigen und bisher im gegenwärtigen Abschnitte gerechn
wurde.

Oder endlich wir schneiden unseren Punkt blo
von mehreren Punkten des Haupt-Systemes an. Da
gienge unsere Arbeit im Allgemeinen wie in den Beispiele
die in **Fig. 8.** und **9.** dargestellt sind; und dieser Fall i
es eigentlich, den wir hier zu berücksichtigen habe
Sind nämlich die Punkte des Haupt-Systemes, von we
chen wir ausgehen, zu zwei und zwei durch Linien mit ei
ander verbunden, so haben wir um den einzuschaltende
Punkt ein Central-System, welches wir mit einer Bedi
gungsgleichung bekanntlich ausgleichen, so z. B. **Fig.**
und **9.** Sind noch aufserdem Linien zwischen den Punkte
des als absolut genau betrachteten Haupt-Systemes vorha
den, so erhalten wir mehrere Bedingungsgleichungen.
hätten wir also z. B. streng genommen in **Fig. 8.** nicht d
Linie $\overset{1}{\cdot}\overset{3}{\cdot}$ weglassen dürfen, weil sie nach **Fig. 12.** in de
Haupt-Systeme mit vorkommt. Sie hätte uns §. 66. zu e
ner zweiten Bedingungsgleichung

$$\frac{\overset{6.1}{\cdot\cdot}}{\underset{\cdot\cdot}{6.2}} \cdot \frac{\overset{6.2}{\cdot\cdot}}{\underset{\cdot\cdot}{6.3}} \cdot \frac{\overset{6.3}{\cdot\cdot}}{\underset{\cdot\cdot}{6.1}} = 1$$

führen müssen. — Fehlt aber eine oder die andere Lin
(Richtung) zwischen den betreffenden Punkten des Haup
Systemes, so findet demungeachtet doch noch eine Ausgle
chung statt, nur müssen wir dann etwas anders ansetzen a
bisher. — Diesen letzten Fall, der uns bisher noch nic
vorgekommen (und von welchem späterhin in einer andere
Beziehung noch einmal die Rede seyn mufs), wollen w
hier durch ein oft vorkommendes Beispiel erläutern.

Gesetzt also es seyen **Fig. 9.** die Punkte des Haupt
Systemes 1; 2; 3 benutzt, um 4 anzuschneiden, die Rich

ngen $\frac{3}{1}$ und $\frac{1}{3}$ aber seyen nicht beobachtet. Wir erwägen
n zuerst, dafs in dem Haupt-Systeme, welches für ab-
lut genau zu nehmen ist, doch die Mittel gegeben seyn
issen, die fehlenden Richtungen zu berechnen, und dafs
se Berechnung uns eine Richtung geben müfste, die wir
ch als absolut genau zu betrachten hätten. Daraus er-
ien wir also, dafs wir nach wie vor für unseren Punkt 4
ie Bedingungsgleichung dritter Klasse haben müssen, in-
m sich irgendwo in unserer Figur eine **Stellvertretung**
die fehlende Richtung finden mufs. Diese Stellvertre-
ng erkennen wir leicht in dem Verhältnisse der beiden Li-
n $\frac{2\cdot 3}{\cdot\,\cdot}$ und $\frac{2\cdot 1}{\cdot\,\cdot}$, welches vermöge des Haupt-Systemes auch
absolut genau bekannt vorausgesetzt werden mufs; und
können also insofern behaupten, dafs der nun auch nach
m Verhältnisse seiner Schenkel bekannte und unveränder-
he Winkel $\frac{3}{2}\frac{1}{}$ die fehlende Richtung vertritt, und uns
o nach n. 58 auf eine Bedingungsgleichung dritter Klasse
weist. — Dagegen ist aber die Darstellung der Bedin-
ng nun eine andere, und also auch der Ansatz nicht mehr
der früheren Form zu machen. Es findet sich aber auch
r eine leichte Darstellung, wenn wir beachten, dafs $\frac{2\cdot 4}{\cdot\,\cdot}$
f gleiche Weise aus $\frac{3\cdot 2}{\cdot\,\cdot}$ oder $\frac{2\cdot 1}{\cdot\,\cdot}$ sich berechnen mufs. Da-
t haben wir sogleich die Darstellung:

$$\frac{\frac{2\cdot 3}{\cdot\,\cdot}\sin\frac{4\cdot 2}{3}}{\sin\left(\frac{3}{2}^{4}+\frac{4}{3}^{2}\right)}=\frac{\frac{2\cdot 1}{\cdot\,\cdot}\sin\frac{2}{1}^{4}}{\sin\left(\frac{4}{2}^{1}+\frac{2}{1}^{4}\right)}$$

; welcher nach der zweiten Methode anzusetzen ist; wo-
aber dann $\binom{3}{2}=\binom{2}{3}=\binom{2}{1}=\binom{1}{2}=0$ gesetzt werden
ıfs. Beispiele der Art siehe *Beiträge* §. 93.

Sollten in solchen Fällen mehrere Richtungen fehlen,
sollten vielleicht **Fig. 9.** $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$ im Haupt-Systeme gar

nicht beobachtet seyn, so würden wir das Fehlende doc
immer auf ähnliche Weise ergänzen können. Mir ist noc
kein Fall dieser letzten Art in der Praxis vorgekommen; da
gegen habe ich mich durch vielfältige Erfahrung überzeug
dafs man durch drei gehörig ausgeglichene Schnitte vo
Hauptpunkten sich immer eines Nebenpunktes zuverlässi
versichert und sich also, wenn solche Schnitte sich nebe
her machen lassen, mit Beobachtungen an den Nebenpunk
ten nicht zu bemühen braucht. Die Berechnung der
(*corr.* Δ) und V (vergl. §. 65.) giebt dann immer ein Mi
tel ab, die jedesmal erreichte Genauigkeit zu beurtheilen.

b) Wenn nun eine Linie eingeschaltet werden so
so wird sie nach Länge und Orientirung bekannt werde
sobald ihre Endpunkte durch Schnitte von Hauptpunkt
nach dem Vorigen eingeschaltet sind. — Sind aber nur
ihren Endpunkten selbst Winkel gemessen, so fragt es sic
ob blofs Hauptpunkte angeschnitten sind, oder ob auch d
Richtung zwischen den Endpunkten beobachtet ist. I
ersten Falle würde die Pothenotsche Aufgabe zweimal z
Anwendung kommen. Im letzteren müfsten, wenn übe
haupt Ueberschüssiges gemessen seyn soll, wenigstens
einem Endpunkte bekanntlich mehr als zwei Hauptpunk
angeschnitten seyn, und es werden dann Bedingungsgl
chungen dritter Klasse zum Vorschein kommen, welche sic
wenn man die oben erwähnte Stellvertretung für etwa fe
lende Haupt-Richtungen berücksichtigt, in der Regel au
immer nach der zweiten Methode werden ansetzen lassen.
Mir ist übrigens auch noch kein Fall dieser Art in der Pra
vorgekommen.

c) Die Einschaltung eines Dreieckssystemes zw
schen zwei gegebenen Punkten wird bekanntlich dadur
bewirkt, dafs man das Dreieckssystem erst für sich b

hnet, indem man eine beliebige Seite als Längen-Einit annimmt, dann die Linie zwischen den gegebenen nkten ihrer Länge und Lage nach polygonometrisch behnet, und damit also sowohl das Maafs für alle Längen auch die Orientirung des Systemes erhält. — Ausgleiungen finden bei dieser Aufgabe also keine anderen statt, welche sich auf die Messungen des einzuschaltenden Symes selbst beziehen, und diese müssen, ehe die gegee Linie benutzt wird, nach den Regeln ausgeführt rden, welche in diesem und dem vorigen Abschnitte abgeidelt sind. Nur werden wir, wenn etwa auf den beii gegebenen Punkten Richtungen unseres einzuschalden Systemes mit besonderer Sorgfalt oder besseren Hülfsteln festgelegt sind, so dafs wir sie nunmehr als absolut nau betrachten wollen, deren Verbesserungen jetzt = 0 setzen haben. Eben so werden wir, wenn wir bei den ssungen des einzuschaltenden Systemes die gegebenen nkte nicht betreten können oder wollen, Sorge tragen, s sie gehörig sicher mit unserem einzuschaltenden Syme verbunden seyen, also wenigstens drei Schnitte erhal, die wir nach dem Obigen ausgleichen.

Die Einschaltung eines Dreiecks-Systemes zwischen ei oder mehreren gegebenen Punkten giebt dann freilich, h den jedesmaligen Umständen, noch zu weiteren Erwägen Veranlassung, wie wir das als absolut genau zu Bechtende zu der Ausgleichung des Einzuschaltenden gehöbenutzen sollen. Hier wird es zweckmäfsig seyn, ein spiel vorzunehmen, welches mir selbst kürzlich in der xis vorgekommen ist.

Der Fall ist **Fig. 21.** näherungsweise dargestellt (abntlich in unrichtigen Verhältnissen, weil eine richtige

Zeichnung einen zu grofsen Maafsstab erfordert hätte). D
Punkt 1 bezeichnet den *Dünsberg*, welcher Hauptpun
meiner Triangulirung ist. Die auf ihm gemessenen, dur
corr. H und *corr. Δ* verbesserten, Winkel (Richtungen) si
also als absolut genau zu betrachten. Der Punkt 2 bedeutet d
Frauenberg, 3 die *Wehrshauser Höhe*. Diese beiden Punk
sind (*Beiträge* §. 93.) von mehreren Haupt-Punkten d
Triangulirung aus durch gehörig ausgeglichene Anschnit
festgelegt, und sind demnach die beiden Linien $\frac{1}{\cdot}\frac{3}{\cdot}$ und $\frac{1}{\cdot}$
auch als absolut genau zu betrachten. Der Punkt 4 ste
den Schlofsthurm, 5 den Thurm des Dörnberger Hof
6 den meteorologischen Thurm in *Marburg* vor. Ich maa
nun in den Punkten 2; 3; 5 und 6 die Winkel zwischen d
schwarz ausgezogenen Richtungen, und ist nun darnach d
System zwischen die drei Punkte 1; 2; 3 einzuschalten.

Es sind hier 6 Punkte mit 13 Linien, unter denen
nur einseitig beobachtet sind. Lassen wir letztere zue
weg, so fällt nicht nur der Punkt 4, sondern auch der Pun
6 heraus, weil letzterer dann nur noch durch eine Richtu
mit den übrigen Punkten zusammenhängt, also der Fig
fremd wird. Wir haben also noch 5 doppelt festgelegte L
nien für 4 Punkte, d. h. wir haben nach n. 57 zwei Bedi
gungsgleichungen zweiter Klasse.

Die erste wird in der Form

$$1)\quad 0 = w_1 + (^3_5) - (^2_5) + (^5_2) - (^3_2) + (^2_3) - ($$

gleich angesetzt werden können; für die zweite aber erha
ten wir, weil $^3{}_1{}^2$ als absolut richtig zu betrachten ist, d
Ansatz:

$$2)\quad 0 = w_2 + (^1_3) - (^2_3) + (^3_2) - (^1_2)$$

Nun zeigt uns, nach Herstellung der einstweilen we
gelassenen Richtungen, unsere n. 58 an, dafs vier Bedi

ngen dritter Klasse vorhanden sind. Wir müssen diesel-
ı erst darzustellen suchen und finden:

$$3)\quad \frac{4.2}{4.1}\cdot\frac{4.1}{4.3}\cdot\frac{4.3}{4.2}=1$$

$$4)\quad \frac{4.2}{4.3}\cdot\frac{4.3}{4.5}\cdot\frac{4.5}{4.2}=1$$

$$5)\quad \frac{4.2}{4.6}\cdot\frac{4.6}{4.5}\cdot\frac{4.5}{4.2}=1$$

$$6)\quad \frac{6.2}{6.3}\cdot\frac{6.3}{6.4}\cdot\frac{6.4}{6.2}=1$$

r 3) und 4) können wir unmittelbar nach der zweiten Me-
de ansetzen, wobei wir zu 3) wieder $\binom{3}{1}=\binom{4}{1}=\binom{2}{1}=0$
setzen haben. Für 5) aber ist noch eine Vorbereitung
hig; denn setzten wir unmittelbar

$$\frac{\sin\frac{4.2}{6}}{\sin\frac{6.4}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{4.6}{5}}{\sin\frac{5.4}{6}}\cdot\frac{\sin\frac{4.5}{2}}{\sin\frac{2.4}{5}}=1$$

hätten wir einen nicht gemessenen Winkel $\frac{4}{5}\frac{6}{}$ in der Glei-
ıng. Diesen müssen wir erst durch gemessene ausdrü-
n, und erhalten:

$$\frac{4.6}{5} = 180^\circ - \frac{5.2}{6} - \frac{6.5}{2} - \frac{2.4}{5}$$

r 6) ist auch noch eine Vorbereitung nöthig; denn setzen
unmittelbar

$$\frac{\sin\frac{6.2}{3}}{\sin\frac{3.6}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{6.3}{4}}{\sin\frac{4.6}{3}}\cdot\frac{\sin\frac{6.4}{2}}{\sin\frac{2.6}{4}}=1$$

haben wir gar vier Winkel in der Gleichung, die erst
ch gemessene zu ersetzen sind, ehe wir nach der zweiten
thode ansetzen können. Wir erhalten:

$$\frac{6.2}{3} = 180^\circ - \frac{3.6}{2} - \frac{2.3}{6}$$

$$\frac{6.3}{4} = \frac{4.2}{6} - \frac{3.6}{2} - \frac{4.2}{3}$$

$$\frac{4.6}{5} = \frac{4.2}{3} + \frac{3.6}{2} + \frac{2.3}{6} - 180^\circ$$

$$\frac{2.6}{4} = 180^\circ - \frac{6.4}{2} - \frac{4.2}{6}$$

Die sechs Bedingungsgleichungen, welche wir auf dies Weise für Auffindung der 16 verlangten Richtungs-Verbesserungen ansetzen können (16 sind nämlich zu suchen, nicht 19, weil die mit 1 zusammenhängenden Richtungen für absolut genau genommen werden), erschöpfen aber die Aufgabe noch nicht. Es kommt hier noch eine siebente hinzu, wegen des Umstandes, dafs auch die beiden Linien $\frac{1}{\cdot}$ und $\frac{1 \cdot 2}{\cdot \cdot}$ für absolut genau zu halten sind. Die deshalbige Bedingung wird dargestellt durch

$$7) \quad \frac{\frac{1 \cdot 3}{\cdot \cdot}}{\frac{1 \cdot 2}{\cdot \cdot}} = \frac{\sin \frac{1}{2}^{3}}{\sin \frac{2}{3}^{1}}$$

und nach der zweiten Methode unmittelbar angesetzt.

Dafs diese siebente Bedingungsgleichung uns nicht durch unsere Formel n. 58 zum Voraus angezeigt werden konnte hat, wie wir leicht einsehen, seinen Grund darin, dafs die Formel nur für den Fall gilt, wo blofs Winkel (Richtungen) gegeben sind, der Umstand also, dafs auch noch eine Seitenverhältnifs als gegeben betrachtet werden soll, eigentlich schon den Aufgaben dieses Kapitels fremd ist. — Wir werden hierauf zurückkommen.

Elftes Kapitel.

Ansatz für ebene Figuren, in denen blofs Linien gemessen sind.

---

§. 93.

Der Fall, bei welchem blofs Linien gemessen sind, kommt freilich in der practischen Geometrie am häufigsten nur da vor, wo es kaum der Mühe lohnt, eine strenge Au

eichung auf ihn anzuwenden, z. B. bei Kettenmessungen
r einzelne Grundstücke. Es giebt aber immer mitunter
ch Fälle, wo wir, wenn die Umstände es nur erlaubten,
rn die allerschärfsten Winkelmessungen anstellen würden,
d nun genöthigt sind, diese z. B. wegen Kleinheit der Sei-
n durch sorgfältige Linear-Messungen zu ersetzen. Sol-
e Fälle sind es denn aber, für welche wir mit unserer Aus-
eichungs-Rechnung gerüstet seyn müssen, wenn wir al-
s leisten wollen, was wir leisten können. Ueberdies ist es
ch für solche Untersuchungen, als welche schon im §. 18.
pfohlen wurden, wo es also z. B. darauf ankommt, über
e Genauigkeit einer Messungs-Methode zu urtheilen, noth-
ndig, die Mittel zu besitzen, um, auch ohne speciell auf
esen Zweck gerichtete directe Messungen, zu einem be-
mmten Urtheile zu gelangen, indem wir nur alles, was uns
nehin vorliegt, gehörig benutzen. Eben so müssen wir
dlich auch bei Untersuchungen über die Genauigkeit frem-
r Arbeiten, der Ausgleichungs-Rechnung uns bedienen.

§. 94.

Wir sehen nun zuerst ein, dafs wir bei blofsen Linear-
essungen nur Bedingungen dritter Klasse haben können,
d haben also zuerst für deren Abzählung zu sorgen.

Hier können wir nun den Lehrsatz aufstellen:

Wenn p Punkte durch l ihrer Länge nach bekannte Linien verbunden sind, so ist wieder, wie im §. 87. n. 58.

$$z_{b_3} = l - 2p + 3$$

er Beweis dieses Lehrsatzes geht eben so wie im §. 87.
enn

I. wir brauchen vorerst wieder 2 Punkte, deren Ver-
ndungs-Linie uns zur willkührlichen Orientirung dient,
d deren Entfernung der Länge nach bekannt seyn mufs,

d. h. wir brauchen zuerst eine Linie zur Grundlage der Construction.

II. Jeder folgende Punkt wird durch Linear-Messung als Durchschnitt zweier Kreise bestimmt, demnach haben wir zur Bestimmung der $p-2$ folgenden Punkte $2(p-2)$ Linien zu messen.

III. Sind nun noch u überschüssige Linien gemessen, so haben wir also zusammen $u+2p-4+1=l$ und da $z_{b_3}=u$; so wird $z_{b_3}=l-2p+3$ W. Z. E. W.

Auch die Zusätze, die wir im §. 87. aus unserem dortigen Lehrsatze ableiteten, lassen sich unmittelbar auf unseren gegenwärtigen Fall übertragen, wenn wir nur überall, wo dort von trigonometrisch bestimmten Richtungen die Rede war, statt derselben gemessene Längen denken.

§. 95.

Das Aufsuchen der Bedingungen wird hier gerade so gemacht, wie es im §. 88. gelehrt ist. Wir lassen nämlich zuerst wieder die isolirten Punkte weg, suchen dann die Central-Systeme auf (deren einfachstes das von zwei Diagonalen durchschnittene Viereck ist), tilgen jedesmal eine Linie als überschüssig und fahren so fort, bis uns entweder blofs isolirte Punkte, oder nicht centrale Systeme übrig bleiben. — Für die Aufsuchung könnten uns also auch dieselben Beispiele dienen, wie im §. 90.

Nur ist hier der wesentliche Unterschied, dafs die leichte und bequeme Darstellung der Bedingungen in endlichen Gleichungen, welche uns oben in den gewöhnlichen Fällen immer unmittelbar zu dem Ansatze nach der zweiten Methode führte, hier nicht mehr statt findet, auch nicht bei den Central-Systemen. Demnach bleibt uns für den Ansatz nur die dritte Methode.

§. 96.

Rücksichtlich dieses Ansatzes nach der dritten Methode haben wir nun Folgendes zu bemerken:

1) Um eine überschüssige Linie aus den übrigen scharf berechnen, müssen wir nothwendig die Winkel der jesmaligen Figur erst berechnen. Diese Winkel können r also bei dem Ansatze als bekannt annehmen. Freilich dürften sie, so wie wir sie aus den gemessenen Linien bechnen, selbst noch Verbesserungen; diese können wir aber, es sich nur von Bestimmung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen handelt, bekanntlich vernachlässigen, bald wir voraussetzen, dafs die gemessenen Linien nur mit vermeidlichen Fehlern behaftet sind.

2) Wenn nur drei gemessene Linien in einem Punkte sammentreffen, so können wir das Verhältnifs ihrer Verderungen und also auch das Verhältnifs der Coefficienten der betreffenden Bedingungsgleichung durch ein ähnliches erfahren finden, als welches wir im §. 91. bei den nicht centralen Systemen in dreistrahligen Punkten anwandten. Wenn mlich z. B. in der **Fig. 22.** die vier Punkte 1; 2; 3; 4 einem auszugleichenden Linien-Systeme gehören, und nun darauf ankommt, das Verhältnifs $(\overset{1.4}{\cdot\,\cdot}) : (\overset{2.4}{\cdot\,\cdot})$ zu finn, so sind nur solche Veränderungen von $\overset{1.4}{\cdot\,\cdot}$ und $\overset{2.4}{\cdot\,\cdot}$ zussig, welche $\overset{3.4}{\cdot\,\cdot}$ der Länge nach unverändert lassen.

Denken wir also den Punkt 4 in einem Kreise um 3 nach * fortgerückt, so haben wir, vorausgesetzt dafs 4.4^* ein nendlich kleiner Bogen sey, sogleich:

$$(\overset{1.4}{\cdot\,\cdot}) = \sin \overset{1.3}{4} . \overset{3.4}{\cdot\,\cdot} (\overset{3}{4})$$
$$(\overset{2.4}{\cdot\,\cdot}) = \sin \overset{2.3}{4} . \overset{3.4}{\cdot\,\cdot} (\overset{3}{4})$$

ntweder durch unmittelbare Betrachtung unendlich kleiner

Dreiecke oder nach den gewöhnlichen Differentialformel für die Dreiecke 1, 4, 3 und 2, 4, 3. Folglich wird

$$\binom{1\cdot 4}{\cdot\ \cdot} : \binom{2\cdot 4}{\cdot\ \cdot} = \sin \tfrac{1\cdot 3}{4} : \sin \tfrac{2\cdot 3}{4}$$

Eben so finden wir das Verhältniſs $\binom{1\cdot 4}{\cdot\ \cdot} : \binom{3\cdot 4}{\cdot\ \cdot}$ wenn wi **Fig. 23.** den Punkt 4 in einem Kreise um 2 nach 4** un endlich wenig fortrücken lassen. Es wird nämlich:

$$\binom{1\cdot 4}{\cdot\ \cdot} = \sin \tfrac{1\cdot 2}{4} \cdot \tfrac{2\cdot 4}{\cdot\ \cdot} \binom{2}{4}$$
$$\binom{3\cdot 4}{\cdot\ \cdot} = -\sin \tfrac{2\cdot 3}{4} \cdot \tfrac{2\cdot 4}{\cdot\ \cdot} \binom{2}{4}$$

und folglich

$$\binom{1\cdot 4}{\cdot\ \cdot} : \binom{3\cdot 4}{\cdot\ \cdot} = \sin \tfrac{1\cdot 2}{4} : -\sin \tfrac{2\cdot 3}{4}$$

Den Grund, weshalb im zweiten Falle das Zeichen sich än dert, erkennen wir leicht darin, daſs der Punkt 4 nur nac einer Seite gerückt werden kann, $\tfrac{2\cdot 4}{\cdot\ \cdot}$ aber zwischen de beiden Dreiecken 1, 4, 2 und 2, 4, 3 liegt, woraus folg daſs $\binom{2}{4}$ in den beiden Dreiecken ein verschiedenes Zeiche haben muſs.

3) Haben wir also für ein Central-System anzusetzen so werden wir an den $(p-1)$ dreistrahligen Punkten all verlangten Verhältnisse auf die eben bemerkte Weise aus arbeiten können. Bei nicht centralen Systemen werden wi aber für die mehr als dreistrahligen Punkte eben so verfah ren müssen, wie wir oben im §. 91. für die ungewöhnliche Fälle verfuhren. Ich weiſs für diese letzteren Fälle auc hier keinen anderen Rath zu geben, als den Weg der Hy pothesen einzuschlagen, indem z. B. eine fragliche Läng willkührlich um einen Fuſs, eine Linie oder dergl. gröſser an genommen wird, als sie gemessen ist, wodurch sich am Ende das gesuchte Verhältniſs eben so ergeben muſs, wie es am Ende des §. 91. an dem zweiten Beispiele erläutert ist.

§. 97.

Als Beispiele solcher Ausgleichungen führe ich ein aar Fälle an, die mir selbst, wenigstens in ganz ähnlicher Weise, vorgekommen sind. Das erste wollen wir ausführ-ch durchmachen.

1) Zum Behufe eines Micrometers habe ich mir uf ein Stück Spiegelglas ein Paar ganz feine gerade Linien $\overset{\cdot 3}{\cdot}$ und $\overset{2\cdot 4}{\cdot\,\cdot}$ gezogen, **Fig. 24.** und es kommt nun darauf n, deren Winkel so genau als möglich zu messen. Ich be-eichne nun mit feinen Diamantstrichen in möglichst glei-hen Entfernungen vom Durchschnittspunkte (der schon we-en möglichen Ausspringens nicht selbst berührt werden arf) vier Punkte, und messe die 6 Entfernungen zwischen nen, indem ich das Glas mit der bezeichneten Seite auf ei-en Transversal-Maafsstab lege, und mit der Loupe die Ent-ernungen ablese. So finde ich:

$o_1 = \overset{1\cdot 2}{\cdot\,\cdot} =$	4,06 Millim.	$o_4 = \overset{2\cdot 4}{\cdot\,\cdot} =$	30,98
$o_2 = \overset{1\cdot 4}{\cdot\,\cdot} =$	30,13	$o_5 = \overset{2\cdot 3}{\cdot\,\cdot} =$	30,03
$o_3 = \overset{1\cdot 3}{\cdot\,\cdot} =$	30,21	$o_6 = \overset{3\cdot 4}{\cdot\,\cdot} =$	3,85

Zur scharfen Berechnung der einen überflüssigen Linie die-es Central-Systemes aus den fünf übrigen wähle ich mir lie Linie $\overset{2\cdot 4}{\cdot\,\cdot}$ als die gröfste, und beschliefse dann, auch diese charfe Berechnung mit fünf Decimalen zu führen, weil diese nir die Hundertel-Millimeter für diese Linie noch genau ge-)en müssen, und dies alles ist, was sich hier erlangen läfst, la selbst diese Hundertel nur auf Schätzung beruhen, bei einem Maafsstabe, der auch nicht für absolut genau zu hal-ten ist.

Ich berechne nun erst für die beiden Dreiecke 1, 2, 3 und 1, 3, 4 alle Winkel aus je drei Seiten, und dann be-

rechne ich mit Hülfe dieser Winkel die drei unbekannten Stücke in den beiden Dreiecken 4, 3, 2 und 4, 1, 2, wodurch ich eine vollständige Prüfung der Rechnung erhalte.

So bekomme ich die Winkel, denen ich zu künftigem Gebrauche gleich ihre *log. sin.* beischreibe:

	log sin		*log sin*
$^{2}_{1}{}^{3} = 83^\circ\,36'\,12''$	9,99728	$^{3}_{2}{}^{4} = 7^\circ\,15'\,1''$	9,10108
$^{3}_{1}{}^{4} = 7\,18\,54$	9,10491	$^{4}_{2}{}^{1} = 81\,25\,31$	9,99512
$^{2}_{1}{}^{4} = 90\,55\,6$	9,99994	$^{3}_{2}{}^{1} = 88\,40\,30$	9,99988
$^{1}_{4}{}^{2} = 7\,39\,23$	9,12461	$^{4}_{3}{}^{1} = 85\,9\,16$	9,99844
$^{2}_{4}{}^{3} = 79\,52\,25$	9,99318	$^{1}_{3}{}^{2} = 7\,43\,18$	9,12827
$^{1}_{4}{}^{3} = 87\,31\,50$	9,99960	$^{4}_{3}{}^{2} = 92\,52\,34$	9,99945

und, doppelt berechnet, die Seite: $\frac{2 \cdot 4}{\cdot\,\cdot} = 30{,}466$.

Zur Aufstellung der Bedingungsgleichung nach der dritten Methode habe ich nun gleich die erste Specialisirung $30{,}466 = 30{,}98 + v_4$, d. h.

$$0 = +0{,}514 + v_4$$

Bezeichne ich nun die Coefficienten der Bedingungsgleichung mit a, so habe ich $a_4 = 1$ und finde nun, nach der im vorigen §. vorgetragenen Methode, vermittelst der beiden dreistrahligen Punkte 2 und 4 aus den obigen *log. sin.* gleich die Logarithmen der vier Coefficienten a_1, a_2, a_5 und a_6. Für a_3 kann ich nun vier verschiedene Bestimmungen vermittelst der dreistrahligen Punkte 1 und 3 aus den vorigen ableiten. Ich mache alle vier Ableitungen, die wenn auch nicht ganz genau, doch sehr genähert übereinstimmen müssen, und erhalte so:

$\log a_1 = 9{,}10120n$	$\log a_4 = 0{,}00000$
$\log a_2 = 9{,}99358n$	$\log a_5 = 9{,}99524n$
$\log a_3 = 9{,}99623$	$\log a_6 = 9{,}12501n$

erdoppele ich nun diese Logarithmen, schlage auf und ad-
re, so kommt $[aa]$ und somit die Normal-Gleichung:

$$0 = +0{,}514 + 3{,}96570\,\kappa_1$$

ıche ich also $log\ \kappa_1$, addire ihn zu den obigen $log\ a$ und
hlage wieder auf, so kommt:

$$v_1 = +0{,}0164 \qquad v_4 = -0{,}1296$$
$$v_2 = +0{,}1277 \qquad v_5 = +0{,}1282$$
$$v_3 = -0{,}1285 \qquad v_6 = +0{,}0173$$

ies giebt nun durch Addition die verbesserten Werthe:

$$o_1 + v_1 = {}^{1\cdot 2}_{\cdot\ \cdot} = 4{,}0764 \qquad o_4 + v_4 = {}^{2\cdot 4}_{\cdot\ \cdot} = 30{,}8504$$
$$o_2 + v_2 = {}^{1\cdot 4}_{\cdot\ \cdot} = 30{,}2577 \qquad o_5 + v_5 = {}^{2\cdot 3}_{\cdot\ \cdot} = 30{,}1582$$
$$o_3 + v_3 = {}^{1\cdot 3}_{\cdot\ \cdot} = 30{,}0815 \qquad o_6 + v_6 = {}^{3\cdot 4}_{\cdot\ \cdot} = 3{,}8673$$

Wiederhole ich nun mit diesen verbesserten Werthen die
bige Berechnung des Widerspruches, so kommt ${}^{2\cdot 4}_{\cdot\ \cdot} = 30{,}849$
as mit dem $o_4 + v_4$ so genau übereinstimmt, als ich es mit
nf Decimalen-Rechnung verlangen kann.

Den gesuchten Winkel finde ich endlich, indem ich aus
en zuletzt auf's Neue scharf berechneten Winkeln ent-
ehme:

$${}^{3,4}_{1} + {}^{1,2}_{4} = 14^\circ\,54'\,38''$$
$${}^{3,4}_{2} + {}^{1,2}_{3} = 14\ 54\ 37$$

as auch so genau übereinstimmt, als mit 5 Decimalen zu
rwarten.

Es versteht sich von selbst, dafs wenn es darauf an-
äme, den Grad der Genauigkeit zu schätzen, womit der
erlangte Winkel gefunden ist, nun erst die nachträgliche
echnung gemacht werden müfste. Also wäre erst $[vv]$ zu
erechnen, daraus nach n. 46 oder 49 das m für die Linear-
Iessungen festzustellen, dann nach §. 74. oder §. 77. die
üttleren Fehler der Winkel ${}^{3,4}_{1}$ und ${}^{1,2}_{4}$ oder ${}^{3,4}_{2}$ und ${}^{1,2}_{3}$ zu

suchen, endlich nach n. 21 der mittlere Fehler ihrer Summe zu berechnen.

2) Es kommt bei gröfseren trigonometrischen Arbeiten mitunter vor, dafs man auf einer Station eine Local-Triangulirung macht, um späterhin, von entfernteren Stationen aus, den einen oder anderen Gegenstand zum Visirpunkte zu gebrauchen, und dafs demnächst z. B. wegen des Zustandes der Atmosphäre oder anderer Umstände diese Gegenstände sich dann doch nicht gut anschneiden lassen (vergl. *Beiträge* §. 56.). — Nun schickt man also einen Gehülfen mit einem Heliotrop hin, der dann seinen Standpunkt durch Linearmessung zwischen die Punkte jener Local-Triangulirung einschalten mufs. — Ist der Gehülfe nun gehörig darauf instruirt, dafs er nichts abliefert, was nicht den Beleg seiner Richtigkeit in sich selbst trägt, so wird er, wenn er sich z. B. **Fig. 24.** im Punkte 4 aufstellt und an die Punkte 1 und 3, die z. B. 10 Ruthen aus einander liegen mögen, anschliefsen soll, auch noch einen Punkt 2 zu Hülfe nehmen, sämmtliche Linien mit Bindfaden abschnüren und mit dem Maafsstabe, den er bei sich führt, so genau als möglich messen. — Erhalte ich dann diese Messungen, so werde ich sie so wie im vorigen Beispiele berechnen und nun dem Gehülfen sagen können, wie genau seine Messungen ausgefallen sind. — Für meinen Gebrauch vergleiche ich dann endlich die ausgeglichene Linie $\overset{1.3}{\cdot\cdot}$ noch mit ihrem aus meiner Local-Triangulirung folgenden Werthe, und mache mich so von dem etwanigen constanten Fehler im Maafsstabe des Gehülfen unabhängig.

Nichts giebt, beiläufig gesagt, aufmerksamere Gehülfen, als die Gewifsheit, dafs auch die unvermeidlichen Fehler an das Tages-Licht kommen müssen.

3) Bei Kettenmessungen pflegen wir bekanntlich eich bei Entwerfung des Planes dazu immer wenigstens ie Prüfungs-Linie in die Figur zu legen, und uns dann beruhigen, wenn beim Auftragen auf das Reifsbrett diese üfungs-Linie stimmt. Ist nun die Figur leicht überhtlich, so legen wir sie wo möglich so, dafs sie alle Dreike schneidet; also wenn z. B. unsere **Fig. 2.** solche Ketmessung vorstellte, zwischen die Punkte 2 und 5. Kann an aber zu solcher Prüfungs-Linie nicht gelangen, so legt man die Dreiecke gern so zu wählen, dafs sich für nen Punkt oder einige Punkte eine doppelte Festlegung giebt. — Wollte man nun aber solche Messungen, beanders der letzten Art benutzen, um über den mittleren ehler der Kettenmessung Untersuchungen anzustellen (vgl. 18. und 32.), so würde man nur zu sorgen haben, dafs, weit es die Umstände gestatten, die gemessenen Linien cht allzusehr von einander verschieden seyen, und dafs wo öglich immer die Kette von gleicher Länge (also fünfruig, dreiruthig oder zweiruthig) angewandt sey.

Zwei Fälle, die ich in den letzten Jahren zur Uebung einer Zuhörer mit diesen mafs, und welche, nach der gebhnlichen Prüfung durch Auftragen, gut ausgefallen zu yn schienen, will ich noch hierher setzen, für den Fall, fs vielleicht einer meiner Leser sie nach den obigen Reln in Rechnung nehmen wollte.

a) Eine fast ganz horizontal liegende Wiese, die nur n und wieder durch sumpfige Stellen Hindernisse hatte, rde mit der fünfruthigen Kette nach Maafsgabe der **ig. 25.** aufgenommen, und waren die Zahlen-Werthe:

$\overset{1.2}{\cdot\,\cdot} = 37{,}20$ Ruthe	$\overset{7.1}{\cdot\,\cdot} = 29{,}89$ Ruthe	$\overset{8.7}{\cdot\,\cdot} = 14{,}78$ Ruth
$\overset{2.3}{\cdot\,\cdot} = 35{,}33$ -	$\overset{8.1}{\cdot\,\cdot} = 38{,}63$ -	$\overset{9.4}{\cdot\,\cdot} = 28{,}20$ -
$\overset{3.4}{\cdot\,\cdot} = 28{,}71$ -	$\overset{8.2}{\cdot\,\cdot} = 31{,}35$ -	$\overset{9.5}{\cdot\,\cdot} = 49{,}72$ -
$\overset{4.5}{\cdot\,\cdot} = 40{,}27$ -	$\overset{8.3}{\cdot\,\cdot} = 33{,}86$ -	$\overset{9.6}{\cdot\,\cdot} = 30{,}62$ -
$\overset{5.6}{\cdot\,\cdot} = 28{,}23$ -	$\overset{8.4}{\cdot\,\cdot} = 38{,}29$ -	$\overset{9.7}{\cdot\,\cdot} = 23{,}50$ -
$\overset{6.7}{\cdot\,\cdot} = 46{,}79$ -	$\overset{8.9}{\cdot\,\cdot} = 15{,}88$ -	

Hier sind also 17 Linien für 9 Punkte und somit zwe Bedingungsgleichungen, die sich vermittelst zweier Central Systeme, des sechsstrahligen um 8 und des fünfstrahlige um 9, nach dem Obigen leicht ansetzen lassen. Macht man nun für die weitere Bearbeitung erst die Voraussetzung dafs die Fehler unabhängig seyen von der Länge der ge messenen Linien, so wären die Bedingungsgleichungen dan nach n. **44**, **45** und **46** zu bearbeiten. Machte man abe die Voraussetzung, die Fehler seyen proportional der Läng (Fehler-Procente), so wären erst die Gewichte demgemä festzusetzen und gienge dann die weitere Rechnung nac n. **47**, **48** und **49**. — Wenn die m bei den beiden Voraus setzungen namhaft verschieden ausfielen, so wäre das ei Grund, diejenige für naturgemäfser zu halten, welche di kleineren m gäbe.

b) Ein sehr hügeliger Acker am Berge machte ohne hin die Annahme mehrerer Hülfspunkte nöthig, um di einzelnen Dreiecke nur übersichtlich zu machen und ihr wenigstens der Hauptsache nach, mit der fünfruthigen Kett messen zu können; denn ein- oder zweimal mufste doch ausnahmsweise die Kette dreiruthig gemacht werden. Dann stellte er sich in der **Fig. 26.** dar. Die Zahlen-Werth waren:

$\frac{2}{\cdot\,\cdot} = 17{,}76$ Ruthe $\quad \frac{7.8}{\cdot\,\cdot} = 28{,}32$ Ruthe $\quad \frac{9.7}{\cdot\,\cdot} = 27{,}62$ Ruthe

$\frac{3}{\cdot\,\cdot} = 13{,}53$ - $\quad \frac{8.1}{\cdot\,\cdot} = 27{,}41$ - $\quad \frac{9.8}{\cdot\,\cdot} = 24{,}98$ -

$\frac{4}{\cdot\,\cdot} = 21{,}73$ - $\quad \frac{9.1}{\cdot\,\cdot} = 28{,}34$ - $\quad \frac{10.3}{\cdot\,\cdot} = 21{,}14$ -

$\frac{5}{\cdot\,\cdot} = 27{,}41$ - $\quad \frac{9.2}{\cdot\,\cdot} = 14{,}69$ - $\quad \frac{10.4}{\cdot\,\cdot} = 6{,}63$ -

$\frac{5}{\cdot\,\cdot} = 15{,}28$ - $\quad \frac{9.3}{\cdot\,\cdot} = 11{,}98$ - $\quad \frac{10.5}{\cdot\,\cdot} = 28{,}30$ -

$\frac{7}{\cdot\,\cdot} = 28{,}49$ - $\quad \frac{9.10}{\cdot\,\cdot} = 20{,}19$ - $\quad \frac{10.6}{\cdot\,\cdot} = 29{,}33$ -

$\frac{10.7}{\cdot\,\cdot} = 26{,}01$ -

Wir haben hier 19 Linien für 10 Punkte, also wieder vei Bedingungsgleichungen, die sich vermittelst der bei- n Central-Systeme um 9 und 10 ansetzen und dann wei- r nach dem Vorigen bearbeiten lassen.

Zwölftes Kapitel.

nsatz für ebene Figuren, in welchen Winkel und Linien gemessen sind.

---

§. 98.

Bei Aufgaben dieser Art, welche in der practischen eometrie z. B. vorkommen, wenn ein Triangel-System it mehreren gemessenen Grundlinien verbunden wird, oder enn polygonometrische Züge zu berechnen sind, tritt of- nbar auch, sobald man eine mehr als alltägliche Genauig- it und eine Kenntnifs über den Grad derselben sucht, die othwendigkeit ein, überschüssige Beobachtungen zu ma- ıen und sie zu strenger Ausgleichung zu benutzen. Man ıt sich dann also zuerst mit Abzählung der Bedingun- n zu beschäftigen, die offenbar hier wie in den früheren apiteln immer in einer bestimmten Anzahl vorhanden sind.

Wir erkennen nun leicht, dafs alle drei Klassen von

Bedingungen, mit welchen uns das zehnte Kapitel bekann
machte, auch hier wieder statt finden können, obwohl sie hie
wie dort nicht immer alle zugleich vorzukommen brauchen.

Die Anzahl der Bedingungen erster Klasse wir
wenn anders die Anlage der Winkelmessungen sie überhaup
zulässig macht, wieder blofs durch Abzählung der Punkt
gefunden, die ringsum von einzelnen gemessenen Winkel
umgeben sind.

Die Anzahl der Bedingungen zweiter Klasse be
rechnet sich aber wie im zehnten Kapitel wieder nach de
Formel n. 57, indem wir die Linien, welche der Richtun
nach doppelt bestimmt sind, abzählen, so wie die Punkt
welche diesen angehören. Der im §. 85. gegebene Bewe
für die Formel ist hier, wo polygonometrische Züge ein
geschlossene Figur theilen können, nur etwas zu verallge
meinern. Es müssen nämlich dann zuerst $p - q$ Punkte durc
$p - q$ nothwendige Linien zu einer geschlossenen Figur ver
bunden gedacht werden. Wenn dann eine weitere Ver
bindung zwischen je zwei von ihnen statt findet, so erfor
dert dieselbe entweder eine Linie und keinen neuen Punk
oder zwei Linien und einen Punkt, allgemein $r+1$ Linie
und r Punkte. Jeder neu hinzutretende Verbindungszug bring
also eine neue Linie mehr als Punkte, und also eine neue Be
dingung zweiter Klasse für die gemessenen Winkel mit sich

Die Abzählung der Bedingungen dritter Klass
erfordert hier aber einige Vorbereitungen, die wir erst ab
gesondert durchgehen müssen.

§. 99.

Da hier Linien vorkommen können, die entweder blo
der Richtung nach, oder blofs der Länge nach, oder aber i
beiderlei Hinsicht bestimmt sind, so müssen wir bei Abzäh

ng der gegebenen Beobachtungen beide Umstände vorerst
ndern. Wir wollen also mit l_ϱ die Anzahl der Linien be-
ichnen, deren Richtung bestimmt ist, d. h. welche
ırch Winkelmessung mit anderen Linien desselben Systemes
rbunden sind; mit l_λ die Anzahl der der Länge nach
emessenen Linien. Wir sehen dann leicht ein, dafs eine
de Linie, welche zwei Punkte unserer Figuren verbindet,
ıtweder in einer von beiden oder in allen beiden Zahlen
itbegriffen seyn kann, so dafs die Linien, welche wir in
r Figur vor uns sehen, nicht blofs einfach durchzuzählen
ıd wie früher, sondern erst der Richtung nach für l_ϱ und
ınn der Länge nach für l_λ. Wir können dies in unseren
eichnungen auch zu gröfserer Sicherheit ausdrücken, in-
m wir z. B. die der Länge nach gemessenen dicker auszie-
n, die fehlenden Richtungen aber nach wie vor punktiren.

Nun wissen wir ferner, dafs ein Punkt gegen zwei ge-
ebene Punkte trigonometrisch festgelegt werden kann: ent-
eder durch zwei Richtungen, deren wenigstens eine von
nem der gegebenen ausgeht, wie im zehnten Kapitel; oder
ırch zwei Längen, wie im elften Kapitel; oder durch eine
ichtung und eine Länge, welche letztere Bestimmungs-
eise hier zuerst vorkommt. In diesem letzteren Falle ist
hier auch gleichgültig, ob die Richtung und die Länge in
ne Linie zusammenfallen oder nicht, indem die theoretisch
attfindende Zweideutigkeit für das Letztere, bei einer durch
berschüssige Messungen bestimmten vorliegenden Figur
ractisch wegfällt.

Was die in §. 87. und 94. erwähnten isolirten Punkte
etrifft, so finden dergleichen auch hier statt, nur sind es
ier nicht allein solche, die blofs durch zwei Richtungen
der blofs durch zwei Längen mit den übrigen Punkten zu-
mmenhängen, sondern wir müssen hier auch solche Punkte

als isolirt betrachten und können sie von der Abzählung aus schliefsen, welche einerseits durch eine Länge, anderer seits durch eine Richtung mit den anderen Punkten zusam menhängen. Dagegen dürfen Punkte mit zwei Linien, vo denen auch nur eine zu den l_ϱ und zugleich zu den l_λ zähl nicht als isolirt betrachtet und vor der Abzählung weggelas sen werden, indem sie überschüssig bestimmt sind und als zu einer Bedingungsgleichung Veranlassung geben können.

Hängt dagegen ein Punkt nur durch eine Linie mi dem Systeme zusammen, so kann er nicht nur, sondern e mufs als fremder Punkt sammt seiner Linie von der Ab zählung ausgeschlossen werden, gleichviel ob seine Lini zu den l_ϱ oder den l_λ oder zu beiden zählt.

Rücksichtlich auf die zweite Art von fremde Punkten, welche wir im §. 87. kennen lernten, die nach Umständen unbestimmt, tetragonometrisch bestimmt ode überschüssig bestimmt seyn können, bemerken wir, dafs ei solcher Punkt auch hier fremd bleibt und also von der Ab zählung auszuschliefsen ist, wenn die von ihm ausgehende einseitigen Richtungen wie oben alle blofs der Richtung nach bekannt sind. Ist aber von diesen Linien auch nur ein der Länge nach gemessen, so hört der Punkt auf fremd z seyn und ist also bei der Abzählung mit zu berücksichtigen denn alsdann bestimmt er sich trigonometrisch und wird als höchstens isolirt.

Dagegen können aber Punkte, durch welche blofs einseitige Richtungen, von anderen Punkten her, gehen und in welchen also keine Winkelmessung stattgefunden hat in unserem gegenwärtigen Falle auf die Abzählung einen Einflufs ausüben, den sie in dem zehnten Kapitel nicht hatten. Sind nämlich zwei solche Punkte in unserer Figur so kann zwar dieselbe noch trigonometrisch bestimmt seyn

e ist es aber nicht mehr nothwendig. Denn denken wir
is durch diese beiden Punkte eine gerade Linie gelegt, so
ann dieselbe nicht als Richtung beobachtet seyn, weil sonst
enigstens in einem der Punkte Winkelmessung stattgefun-
en hätte. Dadurch zerfällt also die Figur in zwei Hälften,
eren jede möglicherweise für sich allein trigonometrisch
estimmt seyn kann, ohne dafs jedoch die Orientirung der
nen Hälfte sich vermittelst der vorhandenen Messungen aus
er Orientirung der anderen Hälfte ableiten läfst. Wir wol-
n diesen möglichen Fall eine Trennung der Orien-
rung nennen. Sie findet nicht statt, wenn von einem
nkte der einen Hälfte zu einem der anderen Hälfte nur eine
ppelt beobachtete Richtung geht, oder wenn sonst über-
upt wenigstens zwei Punkte der einen Hälfte auf irgend
ne Weise mit wenigstens zwei Punkten der anderen Hälfte
igonometrisch oder tetragonometrisch verbunden sind.

So wie zwei Punkte der eben bezeichneten Art eine
rennung der Orientirung veranlassen können (nicht müs-
n), so können drei solche Punkte zwei Trennungen, vier
nkte drei Trennungen veranlassen u. s. w.

Wir werden also, nachdem wir die fremden und isolir-
n Punkte, in dem Sinne des gegenwärtigen Paragraphen,
rerst mit ihren zugehörigen Linien ausgeschlossen ha
n, untersuchen, ob Trennungen der Orientirung stattfin-
n oder nicht, und im ersten Falle auch abzählen, wie viele
ttfinden, und dann können wir den Lehrsatz auf-
llen:

> Wenn ein System von p trigonometrisch verbundenen Punkten l_ϱ der Richtung nach (gleichviel ob einseitig oder doppelt) gegen andere Linien des Systemes festgelegte Linien, l_λ der Länge nach gemessene Linien, und t Trennungen der Orientirung hat, so ist

n. 59. $z_{b_2} = l_\varrho + l_\lambda - t - 2p + 2$

Der Beweis ist, den früheren ganz ähnlich, so zu führen

I. Zur Grundlage der Construction brauchen wir zu erst wieder zwei Punkte. Der Abstand derselben ist nu entweder selbst unter den l_λ enthalten und dann kann di Construction, wie im §. 94., gleich im richtigen Maafs aus geführt werden, oder sie ist nicht darunter enthalten un dann müssen wir sie erst willkührlich annehmen, wie §. 8 und hernach vermittelst einer der gemessenen Längen de richtigen Maafsstab einführen. — Wir brauchen also zu Grundlage nothwendig eine Länge.

II. Eben so brauchen wir für die Grundlage auch noth wendig eine Richtung zur Orientirung und reichen dan mit dieser Orientirung durch die ganze Construction aus, wi im §. 87., wenn keine Trennung der Orientirung stattfinde Finden aber t Trennungen statt, so müssen demnächst noc weitere t Richtungen als Grundlagen der weiteren Orienti rung benutzt werden.

III. Der dritte Punkt wird nun den beiden ersten, un allgemein jeder folgende Punkt zweien vorher bestimmte durch Verwendung von zwei gemessenen Stücken angeschlos sen, die beliebig entweder Richtungen oder Längen sey können.

IV. Wir gebrauchen also zur Grundlage und zur Voll endung der Construction nothwendig $2+t+2(p-2)$ ge messene Stücke.

V. Sind nun noch überdies u Stücke, Längen od Richtungen, überschüssig gemessen, so mufs seyn:

$$u + 2(p-2) + t + 2 = l_\varrho + l_\lambda$$

also ist:

$$z_{b_2} = u = l_\varrho + l_\lambda - t - 2p + 2 \quad \text{W. Z. E. W.}$$

§. 100.

Das Vorhergehende durch Beispiele zu erläutern, wol-
en wir zuerst einige vornehmen, welche in früheren Kapi-
eln schon abgehandelt sind, dort aber noch etwas zu wün-
chen übrig liefsen.

1) Im §. 66. bestimmten wir in **Fig. 7.** den Punkt 4
ermittelst der in 4 gemessenen Winkel und des in 3 hinzu-
ommenden Versicherungs-Schnittes, auf der Grundlage
es Dreieckes 1, 2, 3, dessen Winkel wir als absolut ge-
au voraussetzten. Es fragt sich nun, wie die Rechnung zu
ihren gewesen seyn würde, wenn die drei Seiten des
reieckes statt seiner Winkel gegeben gewesen wären.

Wir hätten dann $l_\varrho = 4$ setzen müssen, weil nicht nur
, $\frac{2}{4}$ und $\frac{3}{4}$, sondern auch $\frac{2}{3}$ (oder satt dessen $\frac{1}{3}$) zu den Rich-
ungen zählt; l_λ wäre $= 3$, t aber $= 0$ gewesen, woraus
$_{b_3} = 1$ folgt, wie es auch seyn mufs. Hätten wir also die
Winkel des Dreieckes 1, 2, 3 aus seinen drei Seiten berech-
et, so würden wir die ganze dortige Rechnung haben bei-
ehalten können.

2) In §. 68. **Fig. 10.** beschäftigten wir uns mit ei-
em Dreiecke, worin alle drei Winkel und alle drei Seiten
emessen waren, und überzeugten uns dann im §. 80. und 81.,
afs immer nur, wir mögen die Sache darstellen wie wir
ollen, zwei Bedingungen dritter Klasse zum Vorscheine
ommen. — Jetzt übersehen wir dies kürzer vermittelst
nserer Formel n. 59, denn es ist $l_\varrho = 3$; $l_\lambda = 3$; $t = 0$;
$= 3$ also $z_{b_3} = 2$.

3) Im §. 92. betrachteten wir den Fall, wo ein Win-
el nebst seinen beiden Schenkeln als absolut genau ange-
ommen wurde, um einen vierten Punkt gegen drei gege-
ene durch Anschnitte festzulegen. Dafs wir dort eine

Bedingung dritter Klasse erhalten mufsten, ersehen wir jetz aus n. 59. Denn es ist eigentlich zu setzen $l_\varrho = 5$; $l_\lambda = 2$ $t = 0$; $p = 4$ also $z_{b_3} = 1$, wie wir auch oben auf einen weitläuftigeren Wege fanden, indem wir nach der Stellvertretung für die fehlende Richtung suchten.

4) Im §. 92. beschäftigten wir uns ferner unter anderem mit dem Dreiecks-Systeme **Fig. 21.** und bemerkten dabei, dafs uns eine Bedingung dritter Klasse zu erfüllen blieb, die uns durch die Formel n. 58 nicht angezeigt war. — Streng genommen, hätten wir aber dort schon gar nicht die Formel n. 58, sondern die Formel n. 59 anwenden und $l_\varrho = 13$; $l_\lambda = 2$; $t = 0$; $p = 6$ setzen sollen. Dann hätten wir gleich richtig $z_{b_3} = 5$ erhalten und wären gleich anfangs auf die Gleichung 7) aufmerksam geworden.

5) Messen wir in einem Vierecke alle 4 Seiten und zwei einander gegenüberliegende Winkel, so haben wir eine Trennung der Orientirung, also $l_\varrho = 4$; $l_\lambda = 4$; $t = 1$; $p = 4$ und damit $z_{b_3} = 1$. Wir finden die betreffende Bedingung dann auch leicht darin, dafs die doppelte Berechnung der Diagonale zwischen den beiden nicht gemessenen Winkeln zu einerlei Werth führen mufs. — Hätten wir statt der beiden einander gegenüberliegenden Winkel zwei benachbarte gemessen, so wäre gewesen $l_\varrho = 3$; $l_\lambda = 4$; $t = 0$ und also auch $z_{b_3} = 1$. — Wären im ersten Falle auch noch beide Diagonalen blofs der Länge nach gemessen worden, so wäre gleichfalls die Trennung der Orientirung geblieben, wir hätten also gehabt $l_\varrho = 4$; $l_\lambda = 6$; $t = 1$ und damit $z_{b_3} = 3$, überzeugen uns auch auf der Stelle, dafs wir 3 Gröfsen mehr gemessen haben, als zur Construction nothwendig waren.

6) Wir erinnern uns, dafs die practische Geometrie lehrt: Es sind zur Bestimmung eines Polygons von p Win-

lpunkten, nothwendig $2p - 3$ Stücke (Polygonwinkel
d Seiten) zu messen, es dürfen aber nicht 3 Seiten feh-
, sondern höchstens 2. Letztere Beschränkung, deren
thwendigkeit die Geometrie nachweist, finden wir nun
ch in unseren Formeln ausgesprochen. Denn messen wir
es, was wir messen können, so ist $l_\varrho = p$; $l_\lambda = p$; $t = 0$
o $z_{b_3} = 2$ und überdies giebt uns unsere n. 57, in welche
l_ϱ für l zu schreiben haben, noch $z_{b_2} = 1$; wir haben
o jedenfalls 3 überschüssige Stücke gemessen. — Woll-
wir nun alle Winkel messen und 3 Seiten ungemessen
sen, so behielten wir zwar $z_{b_2} = 1$, bekämen aber $z_{b_3} = -1$,
s uns die Unmöglichkeit unseres Unternehmens anzeigt. —
essen wir aber z. B. alle Seiten und lassen 3 Winkel weg,
werden wir, wenn die fehlenden Winkel getrennt liegen,
ei Trennungen der Orientirung haben. Wir erhalten also
$l_\varrho = p$; $l_\lambda = p$; $t = 2$ richtig $z_{b_3} = 0$, was uns an-
igt, dafs wir nichts zuviel und nichts zu wenig gemessen
ben. — Eben so lassen sich die übrigen Fälle, von de-
n die practische Geometrie handelt, unter diese Formel
ingen. Den besonderen Ausnahmsfall, wo zwei getrennte
iten fehlen, die einander zufällig gerade parallel sind,
d wo also die Aufgabe unbestimmt wird, berücksichtigen
r im Folgenden nicht mehr, weil er in der Praxis nicht
rkommt.

§. 101.

Was nun die Aufsuchung und Darstellung be-
fft, so können wir im Allgemeinen wohl behaupten, dafs
e Regeln, welche in den beiden vorigen Kapiteln für die dor-
en einfacheren Fälle vorgetragen sind, auch genügen wer-
n, uns selbst in verwickelteren Aufgaben dieses allgemei-

neren Falles durchzuhelfen. Wir werden dann für die B dingungen dritter Klasse mit der zweiten oder dritten M thode sicher immer zum Ansatze gelangen, während die d beiden ersten Klassen niemals Schwierigkeiten verursachen

Solche verwickeltere Aufgaben kommen aber gewifs der Praxis sehr selten vor, wenn wir sie nicht etwa dadur selbst herbeiführen, dafs wir Triangel-Systeme, in Bezi hung auf andere daran anzuschliefsende, als absolut gen voraussetzen, worüber wir das Wesentlichste oben §. 92. a gezeigt und §. 100. zum Theil weiter ausgeführt haben.

Dagegen kommt ein einfacher Fall, bei welchem Lä gen und Winkel gemessen werden, in der Praxis häufig vo die Polygonmessung, und diese wollen wir also jet speciell durchgehen, um, wo wir uns berufen finden d äufserste Genauigkeit dabei zu erstreben, vollständig daz vorbereitet zu seyn.

Wir erinnern uns nun, dafs wir die Polygonmessu rücksichtlich der Winkel (Richtungen) auf dreierlei ve schiedene Weise einleiten können.

1) Indem wir aufser den Seiten die Winkel einzel z. B. mit dem Theodolithen messen, aus letzteren die red cirten Winkel (Azimuthe), und mit diesen dann die Coord naten berechnen.

2) Indem wir die magnetischen Azimuthe (Compafs striche) unmittelbar mit dem Compafs messen.

3) Indem wir durch Azimuthübertragung d reducirten Winkel unmittelbar zu beobachten suchen.

Wir wollen nun diese drei Arten von Polygonmessu einzeln vornehmen, und in ihnen alles, was sich auf Aufs chung, Darstellung und Ansatz bezieht, zusammenstellen.

§. 102.

Für Polygonmessungen mit einzelnen Win-
ln machen wir die Abzählung nach unseren obigen
rmeln, aus welchen wir uns die folgende Uebersicht ab-
ten können, die alle sechs möglichen Fälle darstellt.

Fall.	Ueberschüss. Stücke.	Seiten.	Winkel.	Bedingung. 2. Kl.	Bedingung. 3. Kl.
I.	1	$p-2$	p	1	0
II.	1	$p-1$	$p-1$	0	1
III.	1	p	$p-2$	0	1
IV.	2	$p-1$	p	1	1
V.	2	p	$p-1$	0	2
VI.	3	p	p	1	2

In den Fällen I., IV., VI. werden wir die Bedingung
weiter Klasse immer unmittelbar eben so auffinden und
rstellen können wie bei ebenen Dreiecken. Ueber den
nsatz ist also hierbei nichts weiter zu bemerken. Die Dar-
ellung der Bedingungen dritter Klasse verwickelte
s aber in grofse Weitläuftigkeiten, wenn wir endliche Glei-
ungen suchen wollten, und werden wir da also im Allge-
einen zu der dritten Ansatz-Methode (§. 82.) schreiten
üssen, deren Anwendung hier nach Umständen noch
ne Erleichterung durch zeitige Einführung von Coordina-
n zuläfst. Diese Methode erfordert nun wie immer eine
orgängige Beantwortung der Frage nach dem Verhältnisse
zweier Veränderungen in den Polygonstücken, wenn die-
lben unter sich und mit den übrigen verträglich bleiben sol-
n. Diese Beantwortung finden wir aber jedesmal in einem
er sechs Lehrsätze, die wir gleich beibringen werden.

Vorher wird es aber wohl, um uns hernach kürzer fas-
en zu können, zweckmäfsig seyn, uns erst die Bezeichnung

ins Gedächtnifs zurückzurufen, die wir bei Polygonmessu gen überhaupt zu gebrauchen gewohnt sind.

Demnach numeriren wir die Punkte eines Polygons v p Punkten ringsum mit Ziffern von 1 bis p, so dafs die Za len wachsen, wenn wir beim Herumgehen das Innere der F gur rechts haben, bemerken uns aber dabei, dafs der p oder letzte Punkt eben sowohl mit 0 als mit p bezeichnet we den kann. Auf Durchkreuzungen des Umfanges, die ohn hin in der Praxis selten oder nie vorkommen, nehmen w dabei hier keine Rücksicht. Sollte einmal ein solcher Fa ausnahmsweise vorkommen, so würde er doch die einmal a gefangene Numerirung nicht stören, die immer von Punkt z Punkt auf den Seiten fortgeht. — Sodann bezeichnen wi die Polygon-Winkel allgemein mit α und derjenigen Ord nungszahl, welche ihrem Scheitelpunkte angehört, so da also z. B. α_6 ein abgekürzter Ausdruck für den Winkel $^{7}_{6}$ ist. — Die Richtungs-(Azimuthal-) Unterschiede bezeich nen wir dann ferner mit r und der entsprechenden Ordnungs zahl, so dafs z. B. $r_6 = 180^\circ - \alpha_6$ oder $= 540^\circ - \alpha_6$ is je nachdem α_6 entweder $< 180^\circ$ oder $> 180^\circ$ ist. — Di Seiten selbst bezeichnen wir aber mit s und derjenigen Ord nungszahl, die dem niedrigst numerirten Endpunkte ent spricht, so dafs also z. B. s_6 ein abgekürzter Ausdruck fü $^{6\cdot 7}_{\cdot\cdot}$ ist, und $s_p = s_0$ die Seite zwischen den Punkten p od 0 und 1 bezeichnet. — Azimuthe (oder reducirte Winkel wenn die Orientirung von einer willkührlichen Linie ausgeht bezeichnen wir endlich mit A und der Ordnungszahl, di der betreffenden Seite angehört; so dafs A_m der Winkel ist den die Seite s_m mit der Abscissen-Linie macht.

Wir wollen nun hier noch gleich einen kleinen Zusat machen, der deshalb nöthig wird, weil wir mehreren ver schiedenartigen Gröfsen dieselben Ordnungszahlen geben un

Bedeutung der Correctionen doch unmittelbar zu über-
ien seyn soll. Dazu nämlich schreiben wir jetzt für die
rbesserungen, die zu verbessernde Gröfse selbst mit vor-
setztem v. Also z. B. $v\alpha_6$; vs_6, wo wir oben $(^{7}_{6}{}^{5})$ und
^{7}) schrieben.

Nun müssen wir uns auch noch erinnern, dafs wir eine
ite s_n und die beiden anliegenden Polygon-Winkel α_n
d α_{n+1} oder die beiden entsprechenden Richtungs-Unter-
iiede r_n und r_{n+1} mit Leichtigkeit berechnen können, wenn
r alle übrigen Seiten und Winkel kennen. Sind diese
inkel aber berechnet (oder durch verträgliche Messungen
geben), so haben wir auch gleich den Richtungs-Unter-
ied zwischen der Seite s_n und jeder beliebigen anderen
ite s_m, denn es ist, wenn wir, um negative Winkel zu ver-
iden, 360° zusetzen, unnöthige Vielfache von 360° aber
eder vernachlässigen,

$$r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots\ldots r_{n-1}+r_n = A_n-A_m$$
$$r_{n+1}+r_{n+2}+\ldots\ldots r_{m-1}+r_m = A_m-A_n$$
$$= 360^\circ-(A_n-A_m)$$

ir berechnen bekanntlich denjenigen der beiden Ausdrücke
i leichtesten, bei welchem die wenigsten r vorkommen,
h. auf derjenigen Seite des Umfanges, wo die wenigsten
vischenpunkte liegen, und haben zum Behufe des soge-
nnten Rückwärts-Rechnens, (wo wir die Innenseite des
lygons mit der Aufsenseite vertauschen),

$$_n+180^\circ)-A_m = Z_n-A_m = 180^\circ+r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots r_{n-1}+r_n$$
$$= 180^\circ-r_m \quad -r_{m-1}-\ldots r_{n+2}-r_{n+1}$$

Endlich erinnern wir uns auch noch, dafs wir, nach
kannten Regeln, eines jeden Winkelpunktes Abscis-
und Ordinate in Beziehung auf jede beliebige zur Ab-
ssenlinie angenommene Polygon-Seite berechnen kön-

nen, sobald wenigstens auf einer Seite die zwischenliege
den r und s bekannt sind. Denn nehmen wir z. B. s_m z
Abscissenlinie, den Punkt m zum Anfangspunkte, bezeic
nen die Abscissen mit ${}^m x$, positiv in der Richtung s_m, d
Ordinaten mit ${}^m y$, positiv von der Abscissenlinie aus na
dem Innern der Figur zu, und unterscheiden dieselben f
verschiedene Punkte durch Beifügung der Nummer des Pun
tes als Ordnungszahl, so haben wir bekanntlich:

$$s_n \sin(A_n - A_m) = {}^m y_{n+1} - {}^m y_n = -s_n \sin(Z_n - A_m)$$
$$s_n \cos(A_n - A_m) = {}^m x_{n+1} - {}^m x_n = -s_n \cos(Z_n - A_m)$$

und eben so, wenn wir s_n als Abscissenlinie und n als A
fangspunkt denken:

$$s_m \sin(A_m - A_n) = {}^n y_{m+1} - {}^n y_m = -s_m \sin(Z_m - A_n)$$
$$s_m \cos(A_m - A_n) = {}^n x_{m+1} - {}^n x_m = -s_m \cos(Z_m - A_n)$$

Nach diesen Vorbereitungen sage ich nun:

1. Lehrsatz.

Wenn s_n; α_n und α_{n+1} oder (r_n und r_{n+1}) aus den übr
gen Stücken des Polygons berechnet (mit den übrigen ve
träglich) sind; so ist eine unendlich kleine Aenderun
welche man an eine beliebige Seite s_m des Polygons anbring
mit der daraus folgenden unendlich kleinen Aenderung d
Seite s_n verknüpft durch die Gleichung:

$$(25) \qquad \begin{aligned} ds_n &= -\cos(A_m - A_n)\, ds_m \\ &= -\cos(A_n - A_m)\, ds_m \\ &= -\frac{({}^m x_{n+1} - {}^m x_n)}{s_n} ds_m \\ &= -\frac{({}^n x_{m+1} - {}^n x_m)}{s_m} ds_m \end{aligned}$$

Den Beweis finden wir auf der Stelle, wenn wir uns nu
an das Verfahren erinnern, vermittelst dessen wir einen gro

ı Seiten-Fehler aus dem Schluſs-Fehler suchen. — nken wir nämlich die Seite s_m über $m+1$ hinaus irriger- ise um ein ganz beliebiges Stück ds_m verlängert; so ver- ieben wir dadurch den ganzen Zug zwischen den Punk- $m+1$ und n sich selbst parallel, und also auch den nkt n, um eben so viel; also haben wir nun, da der nkt $n+1$ dabei unverrückt bleibt, in dem Dreiecke zwi- ıen s_n; ds_m und der nunmehr verfälschten Seite s_n+ds_n t völliger Strenge die Gleichung:

$$(s_n+ds_n)^2 = s_n^2+ds_m^2-2s_n\,ds_m\,cos\,(A_n-A_m)$$

twickeln wir links die Parenthese, nehmen in Gemäſsheit serer Voraussetzung die ds_n und ds_m unendlich klein, so ſs ihre Quadrate $= 0$ gesetzt werden müssen, und heben f, so entspringt die Gleichung (25).

2. Lehrsatz.

Wenn die Voraussetzung bleibt, wie im vorigen Lehr- ze, so hängen die unendlich kleinen Veränderungen der rechneten Winkel mit der unendlich kleinen Aenderung r beliebigen Seite s_m zusammen durch die Gleichung:

$$(26)\qquad \begin{aligned} dr_n = -dr_{n+1} = -d\alpha_n = d\alpha_{n+1} &= \frac{\varrho\,sin\,(A_n-A_m)\,ds_m}{s_n} \\ &= -\frac{\varrho\,sin\,(A_m-A_n)\,ds_m}{s_n} \\ &= \frac{\varrho\,({}^m y_{n+1}-{}^m y_n)\,ds_m}{s_n^2} \\ &= -\frac{\varrho\,({}^n y_{m+1}-{}^n y_m)\,ds_m}{s_m\,s_n} \end{aligned}$$

r Beweis ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise wie in m vorigen Lehrsatze. Denn in dem dort gebrauchten eiecke liegt der Seite ds_m, die wir uns einstweilen als end-

lich denken, der Winkel — $dr_{n+1} = dr_n$ gegenüber. W
haben also ganz streng:

$$\sin dr_n = \frac{ds_m}{s_n} \sin\Big(\big(A_n - A_m\big) + dr_n\Big)$$

Entwickeln wir hier rechter Hand, und nehmen dann
Aenderungen so klein, dafs ihre Potenzen und Produ
vernachlässigt werden müssen, so erhalten wir die Gl
chung (26).

3. Lehrsatz.

Wenn s_n; α_n und α_{n+1} (oder r_n und r_{n+1}) aus den üb
gen Polygon-Stücken berechnet, oder mit ihnen verträgli
sind, und ein beliebiger Polygon-Winkel α_m eine unendli
kleine Aenderung $d\alpha_m$ erhält, (die wir uns einstweilen
Secunden ausgedrückt denken können), so leidet dadurch
Seite s_n eine Aenderung ds_n, welche sich berechnet nach
Gleichung:

$$(27) \qquad ds_n = \frac{{}^n y_m \, d\alpha_m}{\varrho}$$

Den Beweis finden wir durch ein ganz ähnliches Verfa
ren, als welches wir anzuwenden pflegen, wenn wir ein
groben Winkel-Fehler aus dem Schlufs-Fehler suche
Wir denken uns nämlich vom Punkte m nach den beid
Punkten n und $n+1$ Diagonalen gezogen und bemerk
dann leicht, dafs die Vergröfserung des Winkels α_m um e
Stück $d\alpha_m$, welches wir einstweilen beliebig grofs denk
können, die beiden, vermittelst der Diagonalen abgeschni
tenen, Seitentheile des Polygons unverändert läfst, und n
das zwischenliegende Dreieck verändert, indem z. B. d
Seiten-Polygon über $\overset{m}{\cdot}\cdot\overset{n}{\cdot}$ ganz unverändert bleibt, das a
dere aber seine Lage um den Winkel $d\alpha_m$ ändert. Demnac
haben wir mit völliger Strenge:

$+ds_n)^2 = \{^{m\,.\,n}\}^2 + \{^{m\,.\,n+1}\}^2 - 2\{^{m\,.\,n}\}\{^{m\,.\,n+1}\}\cos(^{n\,.\,n+1}_{m} + d\alpha_m)$

twickeln wir hier links das Quadrat, rechts den Cosinus, se-
n dann, in Gemäfsheit unserer Voraussetzung, $\sin d\alpha_m = \frac{d\alpha_m}{\varrho}$;
$d\alpha_m = 1$; $ds_n^2 = 0$ und heben auf, so kommt uns zu-
chst:

$$ds_n = \frac{\{^{m\,.\,n}\}\{^{m\,.\,n+1}\}\sin^{n\,.\,n+1}_{m}\, d\alpha_m}{\varrho s_n}$$

ist aber auch:

$$\frac{\sin^{n\,.\,n+1}_{m}}{s_n} = \frac{\sin^{n+1\,.\,m}_{n}}{m\,.\,n+1} = \frac{\sin^{m\,.\,n}_{n+1}}{m\,.\,n}$$

bstituiren wir dieses, so erhalten wir:

$$ds_n = \{^{m\,.\,n}\}\sin^{n+1\,.\,m}_{n} \cdot \frac{d\alpha_m}{\varrho}$$

$$= \{^{m\,.\,n+1}\}\sin^{m\,.\,n}_{n+1} \cdot \frac{d\alpha_m}{\varrho}$$

ides giebt unmittelbar die Gleichung (27).

4. Lehrsatz.

Wenn die Voraussetzung des vorigen Lehrsatzes un-
rändert bleibt, so ergeben sich die unendlich kleinen Ver-
derungen der berechneten Winkel aus der unendlich klei-
n Vergröfserung des Winkels α_m vermittelst der Glei-
ungen:

$$(28)\qquad \begin{aligned} dr_{n+1} &= -d\alpha_{n+1} = \frac{{}^{n}x_m\, d\alpha_m}{s_n} \\ dr_n &= -d\alpha_n = \frac{(s_n - {}^{n}x_m)\, d\alpha_m}{s_n} \end{aligned}$$

er Beweis kann wieder vermittelst des Dreiecks n, m, $n+1$
cht geführt werden. Wir haben nämlich, wenn die d
istweilen erst beliebige endliche Aenderungen bedeuten,
aller Strenge

zuerst $d\alpha_m = dr_n + dr_{n+1}$

und sodann $\left\{\begin{smallmatrix} n \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} sin\left(\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ n \end{smallmatrix}\right) - dr_n) = \left\{\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} sin\left(\begin{smallmatrix} m \cdot n \\ n+1 \end{smallmatrix}\right) - dr_{n+}$

Entwickeln wir in der letzten Gleichung beiderseits die Pa
renthesen, setzen die Aenderungen unendlich klein und he
ben auf, so erhalten wir zunächst:

$$\left\{\begin{smallmatrix} n \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} cos\left(\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ n \end{smallmatrix}\right) dr_n = \left\{\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} cos\left(\begin{smallmatrix} m \cdot n \\ n+1 \end{smallmatrix}\right) dr_{n+1}$$

und demnach mit Hülfe der ersten Gleichung:

$$\left(\left\{\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} cos\left(\begin{smallmatrix} m \cdot n \\ n+1 \end{smallmatrix}\right) + \left\{\begin{smallmatrix} n \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} cos\left(\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ n \end{smallmatrix}\right)\right) dr_{n+1} = \left\{\begin{smallmatrix} n \cdot m \\ \cdot \cdot \end{smallmatrix}\right\} cos\left(\begin{smallmatrix} n+1 \cdot m \\ n \end{smallmatrix}\right) d$$

wo der Factor links $= s_n$, rechts $= {}^n x_m$ zu setzen und so
mit der erste der beiden Ausdrücke bewiesen ist. Der zweit
Ausdruck ergiebt sich dann unmittelbar aus der ersten Gle
chung.

5. Lehrsatz.

Wenn ein ununterbrochener polygonometrischer Zu
zwischen zwei Punkten vermittelst seiner reducirten Wink
A_1; A_2; A_3 u. s. w. (wofür also im Falle des Rückwärts
Rechnens Z_1; Z_2; Z_3 u. s. w. zu setzen) auf eine beliebig
Abscissenlinie in Coordinaten berechnet ist und dann ange
nommen wird, dafs eine seiner Seiten z. B. s_m sich um da
unendlich kleine Stück ds_m ändere; so leiden dadurch di
Coordinaten eines jeden auf m folgenden Punktes, z. B. q
Aenderungen, die sich berechnen lassen nach den Formeln

$$(29) \qquad \begin{aligned} dy_q &= sin\, A_m\, ds_m \\ dx_q &= cos\, A_m\, ds_m \end{aligned}$$

Beweis. Die Zusammensetzung der Coordinaten au
lauter Theilen von der Form $s_m sin\, A_m$ und $s_m cos\, A_m$ mach
es nothwendig, dafs jede, selbst endliche, Aenderung vo
s_m sich unverändert auf alle Punkte überträgt, welche in de
Ordnung darauf folgen, die vorhergehenden aber unverän
dert läfst, indem, wie auch schon im Beweise des erste

hrsatzes bemerkt ist, erst von hier an der ganze Zug und ar sich selbst parallel verschoben wird. Dies wird aber den Formeln (29) ausgesprochen.

6. Lehrsatz.

enn in einem, wie im vorigen Lehrsatze vorausgesetzten, lygonometrischen Zuge ein Winkel z. B. α_m einen unend- h kleinen Zuwachs $d\alpha_m$ erhält (wofür also im Falle des ickwärts-Rechnens wegen Vertauschung der Innen- und ıfsen-Seite — $d\alpha_m$ zu setzen ist), so erleiden dadurch die ordinaten der folgenden Punkte, z. B. q, auch Aenderun- n, die, für jeden besonders, berechnet werden müssen ch den Formeln:

$$(30)\qquad \begin{aligned} dy_q &= -(x_q - x_m)\frac{d\alpha_m}{\varrho} \\ dx_q &= (y_q - y_m)\frac{d\alpha_m}{\varrho} \end{aligned}$$

Beweis. Denken wir uns von dem Punkte m aus zu m jedesmal in Frage stehenden Punkte q die gerade Linie (gezogen, und bezeichnen wir ihren reducirten Winkel ıstweilen mit A_{mq}; so ist zuerst $(y_q - y_m) = mq \sin A_{mq}$ d $(x_q - x_m) = mq \cos A_{mq}$. — Vergrößsert sich n der Winkel α_m allein, um den Zuwachs $d\alpha_m$, so verrückt h dadurch die Linie mq und mit ihr der ganze, sonst un- ändert bleibende, polygonometrische Zug zwischen m und m eben so viel. Die Verrückung des Punktes q entspricht o einer Linie, deren Länge ganz streng $= 2\,mq \sin \frac{1}{2} d\alpha_m$ d deren reducirter Winkel $= A_{mq} + 270^\circ - \frac{1}{2} d\alpha_m$ ist. mnach würde in aller Strenge seyn:

$$\begin{aligned} dy_q &= -2mq \,.\, \sin\tfrac{1}{2} d\alpha_m \,.\, \cos(A_{mq} - \tfrac{1}{2} d\alpha_m) \\ dx_q &= \quad 2mq \,.\, \sin\tfrac{1}{2} d\alpha_m \,.\, \sin(A_{mq} - \tfrac{1}{2} d\alpha_m) \end{aligned}$$

ll nun aber $d\alpha_m$ unendlich klein seyn, so entstehen durch rnachlässigung der höheren Potenzen und Einführung

der ersterwähnten Ausdrücke für die Coordinaten-Differenzen, die Formeln (30).

Die Beweise dieser sechs Lehrsätze sind hier so geführt, wie sie sich am kunstlosesten ergeben. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dafs sie sich auf mancherlei Weise anders darstellen, namentlich auf die bekannten Differential-Gleichungen für ebene Dreiecke zurückführen lassen. Die Sätze lassen sich auch durch verschiedene, zum Theil ganz interessante, Constructionen nachweisen, womit wir uns hier aber nicht aufhalten wollen, wie wir denn überhaupt die Zeichnung von Figuren hier dem Leser selbst überlassen zu können glaubten.

§. 103.

Es bleibt nun noch übrig, das im vorigen §. allgemein vorgetragene Verfahren auf die einzelnen im Anfange desselben aufgezählten Fälle anzuwenden. Vorher möge aber noch erinnert werden, dafs wir hierbei, da heterogene Gröfsen gemessen sind, niemals die im §. 8. schon bemerkte Regel vergessen dürfen, dafs wir uns im Voraus über die Beschaffenheit und Gröfse der mittleren Fehler eine, wenn auch nur genäherte, Kenntnifs zu verschaffen haben. Bei dem Ansatze der Bedingungsgleichungen brauchten wir zwar diese Kenntnifs noch nicht nothwendig zu benutzen, sondern könnten uns hier noch damit begnügen, nur beliebige Einheiten festzusetzen, in welchen wir die Verbesserungen ausdrücken wollen, mit Vorbehalt demnächst bei dem Uebergange zu den Correlaten-Gleichungen nach n. 47 die Gewichte mit Rücksicht auf jene mittleren Fehler gehörig zu bestimmen, welches Geschäft wir bei Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit ohnehin nicht umgehen können. Wir werden aber meistentheils schon bei jener Fest-

tzung am zweckmäfsigsten gleich die mittleren Fehler neh-
en, auch wenn die Beobachtungen gleich genau sind. So
B. würden, wenn der mittlere Fehler jeder Seite = 0,1
thе, jedes Winkels = 1′ wäre, am bequemsten alle Län-
nmaafse gleich vom Anfange in Zehntel-Ruthen ausge-
ückt, und statt des Factors ϱ dann auch $\frac{\varrho}{60}$ in unsere For-
ln eingeführt; weil wir dann gar nicht weiter daran zu
nken brauchen.

In den sechs aufgeführten Fällen ist nun:

Zu I.

wo p — 2 Seiten und p Winkel gemessen sind, nichts
ues zu bemerken, denn die eine Bedingungsgleichung
eiter Klasse ist eben so anzusetzen und zu bearbeiten,
e bei Dreiecken im zehnten Kapitel.

Zu II.

wo p — 1 Seiten und p — 1 Winkel gemessen sind, un-
scheiden wir zwei Fälle. a) Wenn die beiden fehlenden
ücke neben einander liegen. b) Wenn sie getrennt
gen.

Zu a. Wir können hier, ohne der Allgemeinheit Ab-
ıch zu thun, voraussetzen, dafs s_n und α_n nicht gemessen
yen. Denn, wenn etwa s_n und α_{n+1} fehlten, so wäre das
iegel-Bild der Figur nach derselben Form zu berechnen,
er es wären die Punkte umgekehrt zu numeriren.

Wählen wir dann s_{n+1} zur Abscissenlinie (d. h. setzen
$_{+1} = 0$) und $n + 1$ zum Anfangspunkte, und berechnen
ch bekannter Weise die Coordinaten darauf scharf (eine
beit, die wir jedenfalls doch machen müfsten, wenn wir
ch nichts ausgleichen, sondern nur nach bewufster Me-
ode die Figur zum Schlusse bringen wollten); so kommt
s, indem wir nach der Reihenfolge der Punkte fortschrei-
n, am Ende $^{n+1}x_n$ und $^{n+1}y_n$. Wir erhalten also:

$$tang\ \alpha_{n+1} = \frac{{}^{n+1}y_n}{{}^{n+1}x_n}$$

und dadurch einen berechneten Werth für α_{n+1}. Zugleic berechnen wir den Werth von s_n. Nun haben wir aber au ein noch nicht benutztes beobachtetes α_{n+1}. Zieh wir also ersteres von letzterem ab, so bleibt uns unser w_{I} i Sinne des §. 59. und 82., und haben wir also, wenn w wie oben verabredet, die verlangten Verbesserungen mit und vs bezeichnen, und nach unserer schon oft benutzt Weise $d\alpha_n = -v\alpha_n$; $d\alpha_m = -v\alpha_m$; $ds_m = -vs_m$ setze und die Gleichungen auf 0 bringen, unmittelbar unse erste Specialisirung:

$$0 = w_{\text{I}} + v\alpha_{(n+1)}$$

Die folgenden Specialisirungen kommen dann aus den Gle chungen (28) und (26), indem wir mit fünf Decimalen od Hülfstafeln die Coordinaten für die Abscissenlinie s_n und d Anfangspunkt n umrechnen, d. h. nunmehr $A_n = 0$ setz und unser berechnetes α_{n+1} und s_n mit benutzen. W haben nämlich:

nach (28) $$0 = v\alpha_{n+1} + \frac{{}^{n}x_m v\alpha_m}{s_n}$$

nach (26) $$0 = v\alpha_{n+1} + \frac{\varrho\, sin\, A_m vs_m}{s_n}$$

und brauchen nur noch für m nach und nach alle Numme der Punkte zu setzen, deren α und s wir bei der scharf Rechnung gebrauchten, also in der ersten Gleichung al Zahlen von $n+2$ bis $n-1$ einschliefslich, in der zweiten ab von $n+1$ bis $n-1$ einschliefslich. Sind auf diese Wei die Specialisirungen alle gefunden, so können wir die ve langte Bedingungsgleichung daraus zusammenschreiben.

Zu b. Wenn die Seite s_n und der Winkel α_q fehlt,

mmen wir wohl am kürzesten zu unserem Zwecke, wenn wir
n fünften und sechsten der obigen Lehrsätze anwenden. —
hmen wir nämlich die unbestimmte Linie s_n zur Abscis-
linie und berechnen zuerst den Zug zwischen $n+1$
d q vom Anfangspunkte $n+1$ aus, so erhalten wir dadurch
e Ordinate ${}^n y_q$ und können zugleich nach den Formeln
0) und (29) die Verbesserungen $-(x_q - x_m)\frac{v\alpha_m}{\varrho}$ und
A_m vs_m finden, welche diesen berechneten Ordinaten, ver-
ge der zu findenden Verbesserungen aller zwischenliegen-
r Stücke, zukommen. — Berechnen wir sodann dieselbe
dinate rückwärts durch den Zug zwischen n und q von
m Anfangspunkte n aus (wobei wir also uns der Z zu be-
enen, und nicht zu vergessen haben, dafs demnächst we-
n Vertauschung der Innen- und Aufsenseite auch $v\alpha_m$ mit
$v\alpha_m$ zu vertauschen ist, was wir erreichen, wenn wir nur
m $log\ \varrho$ ein n beifügen), so erhalten wir eben so einen
eiten Werth für ${}^n y_q$ nebst seiner Verbesserung, letztere
sgedrückt in den Verbesserungen der hier zwischenliegen-
n Stücke. Setzen wir endlich beide Ausdrücke gleich
d bringen auf 0, so ist unsere Bedingungsgleichung fertig.

Zu III.

Wenn alle Seiten gemessen sind, aber 2 Winkel fehlen,
müssen wir wieder zwei Fälle unterscheiden. a) Die bei-
n fehlenden Winkel folgen unmittelbar auf einander.
) Sie sind durch mehr als eine Seite getrennt.

Zu a. Wenn α_n und α_{n+1} fehlen, s_n aber gemessen ist,
hat man leicht durch scharfe Berechnung auf eine belie-
ge Seite als Abscissenlinie (wozu s_{n+1} sich als am bequem-
en empfehlen möchte) auch einen berechneten Werth für
, also das verlangte w_x, und zugleich, wenn man die Coor-
naten-Rechnung für die Abscissenlinie s_n und den An-
ngspunkt n mit fünf Decimalen oder Hülfstafeln wieder-

holt, nach den Formeln (27) und (25) das Verhältnifs zwischen vs_n und den Verbesserungen aller übrigen gemessenen Stücke. Es ist nämlich

$$\text{nach (27)} \qquad 0 = vs_n - \frac{{}^n y_m}{\varrho} v\alpha_m$$

$$\text{nach (25)} \qquad 0 = vs_n + \cos A_m vs_m$$

Hieraus ergiebt sich also nach der dritten Methode der Ansatz der Bedingungsgleichung, der auf ganz ähnliche Weise zu Stande kommt, wie zu IIa.

Zu b. Wenn zwei getrennte Winkel z. B. α_q und α fehlen, so werden wir erst unser Polygon durch die Diagonale qr in zwei Hälften zerlegen und die Länge der Diagonale beiderseits aus den gemessenen Stücken scharf berechnen müssen. Der Widerspruch wird sich also in der Verschiedenheit der beiden berechneten Zahlen-Werthe für diese Diagonale finden. — Beide Werthe bedürfen aber noch Verbesserungen, und diese können wir wieder nach vorgängiger Umrechnung auf die Diagonale als Abscissenlinie nach den Formeln (27) und (25) durch die am Ende zu findenden Verbesserungen der gemessenen Stücke ausdrücken, indem wir in den Ausdrücken $\frac{y_m v\alpha_m}{\varrho}$ und $-\cos A_m vs_m$ für m nur die Nummern der jedesmal zur Anwendung kommenden Punkte substituiren. Setzen wir also die beiden gefundenen Zahlen-Werthe, einschliefslich der so ausgedrückten Verbesserungen, einander gleich, so haben wir unmittelbar die verlangte Bedingungsgleichung.

Zu IV.

Der Fall, wo $p - 1$ Seiten und alle p Winkel gemessen sind, läfst sich unmittelbar auf den Fall IIa. zurückführen. Denn fehlt z. B. wieder s_n, so sind die beiden benachbarten Winkel α_n und α_{n+1} durch die hier stattfindende Bedingung zweiter Klasse von einander abhängig; wir dürfen

o ohnehin nur einen von ihnen zur Berechnung des Wi-
rspruches bei der Bedingungsgleichung dritter Klasse be-
tzen und werden dieses eben so ausführen können, wie
en gezeigt wurde.

Zu V.

Wenn alle p Seiten gemessen sind, dagegen aber ein
inkel z. B. α_n fehlt, so kann man auch wieder nach IIa.
rfahren, indem man zuerst s_n und α_{n+1} als überschüssig
trachtet und aus den übrigen gemessenen Stücken scharf
rechnet. Dadurch erhält man:

$$0 = w_1 + \mathrm{v}\alpha_{n+1}$$
$$0 = w_2 + \mathrm{v}s_n$$

s erste Specialisirungen der beiden verlangten Bedingungs-
eichungen. Für die weiteren Specialisirungen hat man
nn die Coordinaten aller Punkte für s_n als Abscissenlinie
id n als Anfangspunkt (also $A_n = 0$) mit geringerer Schärfe
berechnen. Hierauf kommen nun die Formeln (28) und
6) für die erste so wie (27) und (25) für die zweite Be-
ngungsgleichung zur Anwendung, indem man

einerseits nach (28) in $0 = \mathrm{v}\alpha_{n+1} + \dfrac{{}^n x_m \mathrm{v}\alpha_m}{s_n}$

und nach (26) in $0 = \mathrm{v}\alpha_{n+1} + \dfrac{\varrho \sin A_m \mathrm{v}s_m}{s_n}$

ndrerseits nach (27) in $0 = \mathrm{v}s_n - \dfrac{{}^n y_m \mathrm{v}\alpha_m}{\varrho}$

und nach (25) in $0 = \mathrm{v}s_n + \cos A_m \mathrm{v}s_m$

r die Coefficienten nach und nach alle Werthe setzt, wel-
ıe das m annimmt, (von $\mathrm{v}\alpha_{n+2}$ bis $\mathrm{v}\alpha_{n-1}$ und von $\mathrm{v}s_{n+1}$ bis
s_{n-1} einschliefslich). Der Ansatz besteht dann, wie schon
ters angemerkt, in einem blofsen Zusammenschreiben der
pecialisirungen.

Zu VI.

Wenn endlich alle Seiten und alle Winkel gemesse sind, so kann ganz eben so verfahren werden, wie obe zu V. Denn betrachtet man α_n, s_n und α_{n+1} als überschüs sig, so hängen die Winkel schon durch die eine Bedingun zweiter Klasse von einander ab, und man hat also:

$$0 = w_1 + v\alpha_{n+1} + v\alpha_{n+2} + \ldots\ldots v\alpha_n$$

und sodann die beiden Bedingungsgleichungen dritter Klass deren erste Specialisirungen wieder sind:

$$0 = w_2 + v\alpha_{n+1}$$
$$0 = w_3 + vs_n$$

Die weiteren Specialisirungen finden sich dann eben so wi zu V.

§. 104.

Aus dem vorigen §. ist ersichtlich, dafs aufser den Falle I., bei welchem nur eine Bedingungsgleichung zwei- ter Klasse anzusetzen bleibt, nur noch drei verschieden Ansatz-Weisen übrig bleiben, indem die Fälle IIa.; IIIa. IV. und V. nur als erleichterte Modificationen von VI. zu be- trachten sind. Es bleibt also nur noch für IIIb. und IIb. ei etwas anderes Verfahren erforderlich. Wir werden also nu für diese drei Fälle, in der Ordnung, wie wir sie angege- ben haben, Rechnungs-Beispiele geben.

Wir wollen zur Abkürzung in allen drei Beispielen vor- aussetzen, dafs alle Beobachtungen von gleicher Genauig- keit seyen und dafs wir uns auf 0,1 Ruthen Linienfehler und 1′ Winkelfehler gefafst zu halten hätten. Dann wollen wi gleich alle Verbesserungen auf diese Weise ausdrücken, wi wir es oben auch schon gemacht haben. Die scharfe Rech- nung wollen wir, freilich nur zur Sicherheit, dafs wir un

htig verstehen, mit 7 Decimalen führen, obwohl wir uns cht wohl erinnern, dafs dies bei Polygonen dieser Art in r Regel nur unnöthiger Luxus ist.

Beispiel zu VI.

Sey für **Fig. 27.**

Gemessen.					
α_1	= 100° 17′ 10″	s_1	= 36,42	Ruthen
α_2	= 240 12 20	s_2	= 53,60	-
α_3	= 48 22 30	s_3	= 70,76	-
α_4	= 124 54 50	s_4	= 55,34	-
α_5	= 118 28 30	s_5	= 63,72	-
α_6	= 87 50 50	s_6	= 57,60	-
	720 6 10			

ie Winkelsumme giebt uns unmittelbar für die verlangte edingungsgleichung zweiter Klasse, das absolute Glied $= +6{,}167$.

Zum Behufe der beiden Bedingungsgleichungen drit- r Klasse wollen wir nun beschliefsen α_3; s_3 und α_4 vorerst s überschüssig zu betrachten und aus den übrigen Stücken harf zu berechnen. Wir nehmen also, nach unserer Vor- hrift, den Punkt 4 zum Anfangspunkte, um die Coordina- n von 3 auf s_4 zu berechnen. Damit steht nun unsere echnung so:

			log sin A	log cos A	log s
r_5 = 61 31 30	A_5 = 61 31 30		9,9440013	9,6783137	1,8042758
r_6 = 92 9 10	A_6 = 153 40 40		9,6468142	9,9524604n	1,7604225
r_1 = 79 42 50	A_1 = 233 23 30		9,9045699n	9,7754951n	1,5613399
r_2 = 299 47 40	A_2 = 173 11 10		9,0742482	9,9969216n	1,7291648
obe r_3 = 131 37 30	A_3 = 304 48 40				
obe r_4 = 55 5 10	A_4 = 359 53 50				

og Δy	log Δx	Δy	Δx		
7482771	1,4825895	+56,0115	+30,3801	y_4 = 0	x_4 = 0
				y_5 = 0	x_5 = +55,34
4072367	1,7128829n	+25,5409	−51,6277	y_6 = +56,0115	x_6 = +85,7201
4659098n	1,3368350n	−29,2354	−21,7188	y_1 = +81,5524	x_1 = +34,0924
3034130	1,7260864n	+ 6,3594	−53,2214	y_2 = +52,3170	x_2 = +12,3736
				y_3 = +58,6764	x_3 = −40,8478

$$\log y_3 = 1{,}7684635 \qquad \alpha_4 = 124\ 50\ 37{,}86$$
$$\log x_3 = 1{,}6111687n \qquad s_3 = 71{,}4945$$
$$\log tang\ \alpha_4 = 0{,}1572948n$$
$$\log sin\ \alpha_4 = 9{,}9141908$$
$$\log s_3 = 1{,}8542727$$

Hieraus haben wir also die ersten Specialisirungen der bei den gesuchten Bedingungsgleichungen dritter Klasse:

$$0 = +4{,}202 + v\alpha_4$$
$$0 = -7{,}345 + vs_3$$

Um nun die weiteren Specialisirungen zu finden, nehmen wir s_3 zur Abscissenlinie, 3 zum Anfangspunkte, und berechnen uns zuerst hierauf die Coordinaten zum Behufe der Coefficienten, entweder mit 5stelligen Logarithmen oder mit Hülfstafeln. In beiden Fällen können wir uns offenbar eine nützliche Probe verschaffen, wenn wir auch noch das α und r_3 aus der obigen scharfen Rechnung zu Hülfe nehmen (was wir zur Ausgleichung nicht mehr gebrauchen, weil dafür durch die Bedingungsgleichung zweiter Klasse gesorgt ist), indem dann x_3 und $y_3 = 0$ werden müssen.

Wir erhalten mit 5 Decimalen, wenn wir alle Linien gleich in Zehntel-Ruthen ausdrücken, (versteht sich mit möglichster Benutzung unserer obigen scharfen Rechnung)

			log sin A	log cos A	log s
$r_4 =$	55 9 22	$A_4 =$ 55 9 22	9,91419	9,75689	2,74304
$r_5 =$	61 31 30	$A_5 =$ 116 40 52	9,95111	9,65227n	2,80428
$r_6 =$	92 9 10	$A_6 =$ 208 50 2	9,68329n	9,94252n	2,76042
$r_I =$	79 42 50	$A_I =$ 288 32 52	9,97684n	9,50256	2,56134
$r_2 =$	299 47 40	$A_2 =$ 228 20 32	9,87340n	9,82262n	2,72916
Probe $r_3 =$	131 39 28	$A_3 =$ 360 0 0			

log Δy	log Δx	Δy	Δx
2,65723	2,49993	+454,18	+316,18
2,75539	2,45655n	+569,36	−286,12
2,44371n	2,70294n	−277,79	−504,59
2,53818n	2,06390	−345,28	+115,85
2,60256n	2,55178n	−400,46	−356,27

		für (28)	für (26)	für (27)
		$\log x$	$\log \frac{\varrho}{60\, s_3}$	$\log y$
$y_3 = 0$	$x_3 = 0$			
$y_4 = 0$	$x_4 = +714{,}95$			
$y_5 = +454{,}18$	$x_5 = +1031{,}13$	3,01331		2,65723
$y_6 = +1023{,}54$	$x_6 = +745{,}01$	2,87216	0,68201	3,01011
$y_1 = +745{,}75$	$x_1 = +240{,}42$	2,38097		2,87259
$y_2 = +400{,}47$	$x_2 = +356{,}27$	2,55178		2,60257
obe $y_3 = +0{,}01$	$x_3 = +0{,}00$	$\log \frac{1}{s_3} = 7{,}14573$		$\log \frac{60}{\varrho} = 6{,}46372n$

eil wir die Logarithmen der Coefficienten hernach bei Bil-
ng der Normalgleichungen wieder zu brauchen haben, so
ıreiben wir sie lieber auf, statt dafs wir für die Bildung
r Bedingungsgleichungen allein gleich im Kopfe addiren
d aufschlagen würden. Wir erhalten so, indem wir die
ihenfolge nach unseren Ordnungszahlen machen:

Bei	für (28)	Bei	für (26)	Bei	für (27)	Bei	für (25)
$\nu\alpha_1$	9,52670	νs_1	$0{,}65885n$	$\nu\alpha_1$	$9{,}33631n$	νs_1	9,50256
$\nu\alpha_2$	9,69751	νs_2	$0{,}55541n$	$\nu\alpha_2$	$9{,}06629n$	νs_2	$9{,}82262n$
		νs_4	0,59620			νs_4	9,75689
$\nu\alpha_5$	0,15904	νs_5	0,63312	$\nu\alpha_5$	$9{,}12095n$	νs_5	$9{,}65227n$
$\nu\alpha_6$	9,01789	νs_6	$6{,}36530n$	$\nu\alpha_6$	$9{,}47383n$	νs_6	$9{,}94252n$

ollen wir uns also die Bedingungsgleichungen nun voll-
ndig zusammenstellen, so haben wir (des Druckes wegen
lumnenweise geschrieben):

1ste Bedingungsgl. (2. Klasse)	2te Bedingungsgl. (3. Klasse)	3te Bedingungsgl. (3. Klasse.)
$0 = +6{,}167$	$0 = +4{,}202$	$0 = -7{,}345$
$+\nu\alpha_1$	$+0{,}3363\nu\alpha_1$	$-0{,}2169\nu\alpha_1$
$+\nu\alpha_2$	$+0{,}4983\nu\alpha_2$	$-0{,}1165\nu\alpha_2$
$+\nu\alpha_3$		
$+\nu\alpha_4$	$+\nu\alpha_4$	
$+\nu\alpha_5$	$+1{,}4422\nu\alpha_5$	$-0{,}1321\nu\alpha_5$
$+\nu\alpha_6$	$+1{,}0420\nu\alpha_6$	$-0{,}2977\nu\alpha_6$
	$-4{,}5588\nu s_1$	$+0{,}3181\nu s_1$
	$-3{,}5926\nu s_2$	$-0{,}6647\nu s_2$
		$+\nu s_3$
	$+3{,}9464\nu s_4$	$+0{,}5713\nu s_4$
	$+4{,}2965\nu s_5$	$-0{,}4490\nu s_5$
	$-2{,}3190\nu s_6$	$-0{,}8760\nu s_6$

Somit wäre also unsere Aufgabe des Ansatzes gelöst. Die weitere Bearbeitung dieser Bedingungsgleichungen geht dann nach den Regeln des sechsten Kapitels. Es würde überflüssig seyn diese weitere Rechnung hier abdrucken zu lassen. Es genügt zu bemerken, dafs der Leser, welcher sie selbst ausführt, die Normalgleichungen erhalten mufs:

$$\begin{aligned} 0 &= +6{,}167 + 6{,}000\,\kappa_1 + 4{,}319\,\kappa_2 - 0{,}763\,\kappa_3 \\ 0 &= +4{,}202 + 4{,}319\,\kappa_1 + 77{,}629\,\kappa_2 + 2{,}663\,\kappa_3 \\ 0 &= -7{,}345 - 0{,}763\,\kappa_1 + 2{,}663\,\kappa_2 + 3{,}005\,\kappa_3 \end{aligned}$$

Hieraus folgen die Correlaten:

$$\kappa_1 = -0{,}656;\ \kappa_2 = -0{,}0988;\ \kappa_3 = +2{,}365$$

und damit die verlangten Verbesserungen. Bringen wir diese dann (wieder in Secunden und ganzen Ruthen ausgedrückt) gehörig an und runden die practisch unbrauchbaren Decimalen weg, so erhalten wir das:

Ausgeglichene Polygon.

α_1	$= 100^\circ\ 15'\ 58''$	s_1	$= 36{,}540$ Ruthen
α_2	$= 240\ 11\ 21$	s_2	$= 53{,}478$ -
α_3	$= 48\ 21\ 51$	s_3	$= 70{,}997$ -
α_4	$= 124\ 54\ 5$	s_4	$= 55{,}436$ -
α_5	$= 118\ 27\ 23$	s_5	$= 63{,}571$ -
α_6	$= 87\ 49\ 22$	s_6	$= 57{,}416$ -

welches nun innerhalb der practisch brauchbaren Gränze gehörig schliefst, indem es, wieder scharf berechnet, giebt

$$\begin{aligned} [\alpha] &= 720^\circ \\ \alpha_4 &= 124^\circ\ 54'\ 6'',10 \\ s_3 &= 70{,}9964 \end{aligned}$$

Hätten wir noch nähere Uebereinstimmung gewünscht, so hätten wir das Ausgeglichene nicht abrunden dürfen.

Beispiel zu IIIb.

Sey ferner zu **Fig. 27.**

	Gemessen.	
α_1	fehlt	$s_1 = 36{,}42$
α_2	$= 240^\circ\ 12'\ 20''$	$s_2 = 53{,}60$
α_3	$= 48\ 22\ 30$	$s_3 = 70{,}76$
α_4	fehlt	$s_4 = 55{,}34$
α_5	$= 118\ 28\ 30$	$s_5 = 63{,}72$
α_6	$= 87\ 50\ 50$	$s_6 = 57{,}60$

erst machen wir die scharfe Berechnung der ersten Pogonhälfte für die Abscissenlinie s_1 und den Anfangsnkt 1.

			log sin A	*log cos A*	*log s*
$_2 = 299\ 47\ 40$	$A_2 = 299\ 47\ 40$		9,9384265*n*	9,6962601	1,7291648
$^3 = 131\ 37\ 30$	$A_3 = 71\ 25\ 10$		9,9767518	9,5032971	1,8497878

g Δy	*log Δx*	*Δy*	*Δx*		
575913*n*	1,4254249	−46,5148	+26,6333	$y_1 = 0$	$x_1 = 0$
265396	1,3530849	+67,0717	+22,5468	$y_2 = 0$	$x_2 = +36{,}42$
				$y_3 = -46{,}5148$	$x_3 = +63{,}0533$
				$y_4 = +20{,}5569$	$x_4 = +85{,}6001$

$$\log y_4 = 1{,}3129576 \qquad {}^{2.4}_{1} = 13\ 30\ 13{,}97$$
$$\log x_4 = 1{,}9324743 \qquad {}^{4.1}_{\cdot\cdot} = 88{,}0339$$
$$\log tang\ {}^{2.4}_{1} = 9{,}3804833$$
$$\log cos\ {}^{2.4}_{1} = 9{,}9878245$$
$$\log {}^{4.1}_{\cdot\cdot} = 1{,}9446498$$

n machen wir, zum Behuf der Coefficienten der Correcnen, die weniger scharfe Rechnung für die Abscissenlinie und den Anfangspunkt 4, wobei wir gleich wieder beliefsen, die endlichen Verbesserungen in Minuten und hntel-Ruthen auszudrücken.

			log sin A	*log cos A*	*log s*
$r_1 = 166\ 29\ 46$	$A_1 = 166\ 29\ 46$		9,36831	9,98782*n*	2,56134
$r_2 = 299\ 47\ 40$	$A_2 = 106\ 17\ 26$		9,98220	9,44795*n*	2,72916
$r_3 = 131\ 37\ 30$	$A_3 = 237\ 54\ 56$		9,92802*n*	9,72523*n*	2,84979
be $r_4 = 122\ 5\ 4$	$A_4 = 360\ 0\ 0$				

$\log \Delta y$	$\log \Delta x$	Δy	Δx
1,92965	2,54916n	+ 85,05	− 354,13
2,71136	2,17711n	+ 514,47	− 150,35
2,77781n	2,57502n	− 599,53	− 375,85

		Für (27)	Bei	Für (27)	Bei	Für (25
$y_4 =$ 0	$x_4 =$ 0	$\log y$				
$y_1 =$ 0	$x_1 = +880{,}34$	1,92967	$v\alpha_2$	8,39339	vs_1	9,9878
$y_2 = +85{,}05$	$x_2 = +526{,}21$	2,77780	$v\alpha_3$	9,24152	vs_2	9,4479
$y_3 = +599{,}52$	$x_3 = +375{,}86$	$\log \frac{60}{\varrho} = 6{,}46372$			vs_3	9,7252
Probe $y_4 = -0{,}01$	$x_4 = +0{,}01$					

Dies giebt uns also den ersten Werth der Diagonale i Zehntel-Ruthen:

$$880{,}339 + 0{,}0247v\alpha_2 + 0{,}1744v\alpha_3 + 0{,}9723vs_1 + 0{,}2805vs_2 + 0{,}5312vs_3$$

Ganz eben so rechnen wir nun für die zweite Polygon Hälfte, in Beziehung auf die Abscissenlinie s_4 und de Anfangspunkt 4.

		$\log \sin A$	$\log \cos A$	$\log s$
$r_5 =$ 61 31 30	$A_5 =$ 61 31 30	9,9440013	9,6783137	1,8042758
$r_6 =$ 92 9 10	$A_6 =$ 153 40 40	9,6468142	9,9524604n	1,7604225

$\log \Delta y$	$\log \Delta x$	Δy	Δx		
				$y_4 =$ 0	$x_4 =$ 0
				$y_5 =$ 0	$x_5 = +55{,}34$
1,7482771	1,4825895	+56,0115	+30,3801	$y_6 = +56{,}0115$	$x_6 = +85{,}720$
1,4072367	1,7128829n	+25,5409	−51,6277	$y_1 = +81{,}5524$	$x_1 = +34{,}092$

$$\log y_1 = 1{,}9114368 \qquad {}^{5}_{4}{}^{1} = 67\ 18\ 46{,}74$$
$$\log x_1 = 1{,}5326576 \qquad {}^{1}_{\cdot}{}^{4}_{\cdot} = 88{,}3917$$
$$\log tang\ {}^{5}_{4}{}^{1} = 0{,}3787792$$
$$\log sin\ {}^{5}_{4}{}^{1} = 9{,}9650254$$
$$\log {}^{1}_{\cdot}{}^{4}_{\cdot} = 1{,}9464114$$

Sodann, zum Behufe der Coefficienten, für die Abscissen linie ${}^{1}_{\cdot}{}^{4}_{\cdot}$ und den Anfangspunkt 1.

		$\log \sin A$	$\log \cos A$	$\log s$
$r_4 =$ 112 41 13	$A_4 =$ 112 41 13	9,96503	9,58624n	2,74304
$r_5 =$ 61 31 30	$A_5 =$ 174 12 43	9,00367	9,99778n	2,80428
$r_6 =$ 92 9 10	$A_6 =$ 266 21 53	9,99913n	8,80212n	2,76042
Probe $r_1 =$ 93 38 7	$A^1 =$ 360 0 0			

$\log \Delta y$	$\log \Delta x$	Δy	Δx
2,70807	2,32928n	+ 510,59	− 213,44
1,80795	2,80206n	+ 64,26	− 633,96
2,75955n	1,56254n	− 574,84	− 36,52

$y_1 = 0$	$x_1 = 0$	Für (27)	Bei	für (27)	Bei für (25)
$y_4 = 0$	$x_4 = +883{,}92$	$\log y$			vs_4 9,58624
$y_5 = +510{,}59$	$x_5 = +670{,}48$	2,70807	$v\alpha_5$	9,17179	vs_5 9,99778
$y_6 = +574{,}85$	$x_6 = +36{,}52$	2,75956	$v\alpha_6$	9,22328	vs_6 8,80212
obe $y_1 = +0{,}01$	$x_1 = 0{,}00$	$\log \frac{60}{\varrho} = 6{,}46372$			

ieraus erhalten wir den zweiten Werth der Diagonale
Zehntel-Ruthen:

$$83{,}917 + 0{,}1485\, v\alpha_5 + 0{,}1672\, v\alpha_6 + 0{,}3857\, vs_4 + 0{,}9949\, vs_5 + 0{,}0634\, vs_6$$

ehen wir nun die beiden Werthe von einander ab, so ha-
n wir die verlangte Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} = +3{,}578 &- 0{,}0247\, v\alpha_2 - 0{,}1744\, v\alpha_3 + 0{,}1485\, v\alpha_5 + 0{,}1672\, v\alpha_6 \\ &- 0{,}9723\, vs_1 - 0{,}2805\, vs_2 - 0{,}5312\, vs_3 \\ &+ 0{,}3857\, vs_4 + 0{,}9949\, vs_5 + 0{,}0634\, vs_6 \end{aligned}$$

ese Bedingungsgleichung führt nun auf dem im sechsten
ıpitel angezeigten Wege zu der Normalgleichung:

$$0 = +3{,}578 + 2{,}52993\, \kappa_1$$

d demnächst zu dem (wie oben abgerundeten)

Ausgeglichenen Polygone:

α_1	(99 49 49)	s_1 = 36,558	Ruthen
α_2	= 240 12 22	s_2 = 53,640	-
α_3	= 48 22 45	s_3 = 70,835	-
α_4	(125 16 11)	s_4 = 55,285	-
α_5	= 118 28 17	s_5 = 63,579	-
α_6	= 87 50 36	s_6 = 57,591	-

ird in Beziehung hierauf die scharfe Rechnung wieder-
lt, so findet sich die Diagonale aus beiden Polygonhälften,

hinlänglich genau übereinstimmend, 88,2235 und 88,2226. Die beiden fehlenden Winkel, die wir daraus erhalten, sind in Parenthesen an ihren Platz geschrieben.

Dafs diese Werthe hier so bedeutend von denen abweichen, welche wir im vorigen Beispiele fanden, wird niemand befremden, welcher im Rückblicke auf unseren §. 4 sich vergegenwärtigt, dafs hier jedes unmittelbare Zeugnifs für die Gröfse dieser Winkel fehlt, statt dafs sie dort mit unter den beobachteten Gröfsen waren. Das Urtheil über die Genauigkeit der **berechneten** α_1 und α_4 müfste hier erst nach den Regeln des achten Kapitels bestimmt werden.

Beispiel zu IIb.

Sei endlich zu **Fig. 27.**

	Gemessen.		
$\alpha_1 = 100\ 17\ 10$		$s_1 =$	36,42 Ruthen
$\alpha_2 = 240\ 12\ 20$		$s_2 =$	53,60 "
$\alpha_3 = 48\ 22\ 30$		s_3	fehlt
$\alpha_4 = 124\ 54\ 50$		$s_4 =$	55,34
$\alpha_5 = 118\ 28\ 30$		$s_5 =$	63,72
α_6	fehlt	$s_6 =$	57,60

Nach §. **103.** berechnen wir nun zuerst auf die Abscissenlinie s_3 und den Anfangspunkt 4 den **ersten Zug.**

		$\log \sin A$	$\log \cos A$	$\log s$
$r_4 = 55\ 5\ 10$	$A_4 = 55\ 5\ 10$	9,9138208	9,7576576	1,7430392
$r_5 = 61\ 31\ 30$	$A_5 = 116\ 36\ 40$	9,9513703	9,6512126n	1,8042758

$\log \Delta y$	$\log \Delta x$	Δy	Δx		
1,6568600	1,5006968	+45,3795	+31,6736	$y_4 = 0$	$x_4 = 0$
1,7556461	1,4554884n	+56,9700	−28,5423	$y_5 = +45,3795$	$x_5 = +31,673$
				$y_6 = +102,3495$	$x_6 = +3,131$

Dann haben wir für die Correctionen (in Minuten und Zehntel-Ruthen)

		Bei	für (30)	Bei	für (29)
$(x_6-x_4) = -31{,}313$	$\log(x_6-x_4)n = 1{,}49572n$	$v\alpha_4$	7,95944n	vs_4	9,91382
$(x_6-x_5) = +285{,}423$	$\log(x_6-x_5)n = 2{,}45549$	$v\alpha_5$	8,91921	vs_5	9,95137
	$\log\frac{60}{\varrho} = 6{,}46372$				

Demnach haben wir (in Zehntel-Ruthen) den ersten erth der fraglichen Ordinate:

$$= +1023{,}495 - 0{,}00911v\alpha_4 + 0{,}08303v\alpha_5 + 0{,}82002vs_4 + 0{,}89406vs_5$$

Nun berechnen wir den zweiten Zug rückwärts vom nkte 3 aus.

		log sin Z	log cos Z	log s
$_3 = 131\ 37\ 30$	$Z_2 = 48\ 22\ 30$	9,8736160	9,8223332	1,7291648
$_2 = 299\ 47\ 40$	$Z_1 = 108\ 34\ 50$	9,9767518	9,5032971n	1,5613399
$_1 = 79\ 42\ 50$	$Z_6 = 28\ 52\ 0$	9,6837430	9,9423779	1,7604225

$g\,\Delta y$	log Δx	Δy	Δx		
027808	1,5514980	+40,0664	+35,6039	$y_2 = +40{,}0664$	$x_2 = +35{,}6039$
380917	1,0646370n	+34,5217	−11,6048	$y_1 = +74{,}5881$	$x_1 = +23{,}9991$
441655	1,7028004	+27,8077	+50,4429	$y_6 = +102{,}3958$	$x_6 = +74{,}4420$

						$y_3 = 0$,	$x_3 = 0$

Ferner haben wir für die Correctionen zu rechnen, wie en, nur dafs wir, weil wir rückwärts gerechnet haben, für 0) das ϱ negativ nehmen.

		Bei	für (30)	Bei	für (29)
$(x_6-x_3) = -744{,}420$	$\log(x_6-x_3)n = 2{,}87182n$	$v\alpha_3$	9,33554	vs_2	9,87362
$(x_6-x_2) = -388{,}381$	$\log(x_6-x_2)n = 2{,}58926n$	$v\alpha_2$	9,05298	vs_1	9,97675
$(x_6-x_1) = -504{,}429$	$\log(x_6-x_1)n = 2{,}70280n$	$v\alpha_1$	9,16652	vs_6	9,68374
	$\log\frac{60}{\varrho} = 6{,}46372n$				

Hieraus erhalten wir den zweiten Werth der ent- neidenden Ordinate:

$$= +1023{,}958 + 0{,}21654v\alpha_3 + 0{,}11297v\alpha_2 + 0{,}14673v\alpha_1 + 0{,}74752vs_2 + 0{,}94788vs_1 + 0{,}48277vs_6$$

Demnach ist durch Subtraction die verlangte Bedin- ngsgleichung:

$$0 = +0{,}463 + 0{,}14673 v\alpha_1 + 0{,}11297 v\alpha_2 + 0{,}21654 v\alpha_3 + 0{,}00911 v\alpha_4 - 0{,}08303 v\alpha$$
$$+ 0{,}94788 vs_1 + 0{,}74752 vs_2 - 0{,}82002 vs_4 - 0{,}89406 vs_5 + 0{,}48277 vs$$

Diese Bedingungsgleichung nach den Regeln des sechsten Kapitels weiter bearbeitet, führt dann zu dem

Ausgeglichenen Polygone:

α_1	= 100 17 9	s_1	= 36,4065 Ruthen
α_2	= 240 12 19	s_2	= 53,5893 -
α_3	= 48 22 28	s_3	(71,3021) -
α_4	= 124 54 50	s_4	= 55,3517 -
α_5	= 118 28 31	s_5	= 63,7327 -
α_6	(87 44 43)	s_6	= 57,5931 -

Dieses giebt nun aus beiden Zügen $y_6 = 102{,}3706$ und 102,3705. Die beiden fehlenden Stücke, die sich aus dieser letzten Rechnung ergeben, sind oben schon in Parenthese beigeschrieben.

Abgesehen von der Rechnung mit 7 Decimalen, die bei Polygonen, deren Seiten 60 bis 80 Ruthen lang sind, wie schon bemerkt, völlig unnütz ist, weil uns bei der Winkel-Messung die Mittel fehlen, die Visirpunkte auf Secunden genau eben da zu treffen, wo wir die Winkel vorher gemessen haben, oder nachher messen wollen; haben wir in diesen Beispielen, um der Uebersicht wegen, hin und wieder mehr Zahlen geschrieben, als practisch nöthig ist. Wir haben nämlich bei der Berechnung der Coefficienten verschiedene Logarithmen blofs aus der scharfen Rechnung abgeschrieben. Auch kann man in vielen Fällen das Aufschlagen der Zahlen für die Coefficienten, deren Logarithmen man bei der weiteren Arbeit nur gebraucht, so wie das förmliche Zusammenschreiben der Bedingungsgleichungen ganz ersparen.

§. 105.

Um nun die Polygonmessung mit Compafs-
richen auf das Vorige zurückführen zu können, müssen
r uns den wesentlichen Unterschied vergegenwärtigen, der
erbei besteht, und das ist ein doppelter.

1) Statt dafs wir im Vorigen die Azimuthe (reducirten
inkel) uns blofs als nützliche Rechnungsgröfsen aus den
inkeln erst ableiteten, und dann für letztere die Verbes-
ungen suchten, treten nun diese Azimuthe als selbstständ-
ge und unabhängig von einander beobachtete Gröfsen auf,
d sind also als solche auch unmittelbar zu verbessern.

2) Wir knüpfen hier unsere Richtungs-Bestimmungen
ht mehr an Richtungen desselben Systemes, sondern an
ie dem Systeme fremde Linie, den magnetischen Meri-
an, oder vielmehr an jede andere beliebige Linie, die mit
mselben in einer, als unveränderlich angenommenen, Ver-
idung steht, z. B. den astronomischen Meridian, (weshalb
ch Umständen ja bekanntlich auch die Theilung des Com-
sses absichtlich um einen gewissen Winkel verschoben zu
rden pflegt). Wir müssen also vom Anfange an darauf
rzichten, aus der Winkelsumme eine Bedingungsglei-
ung zweiter Klasse zu schöpfen. Wenn wir auch, nach
n bekannten Regeln, das Rückwärts-Visiren anwenden,
dient dieses uns immer nur dazu, die Excentricität unseres
mpasses zu eliminiren, und ein mittleres Azimuth für die
desmal betrachtete Linie zu erhalten, um unsere Annahme,
fs die der Figur fremde Richtung überall sich selbst pa-
llel bleibe, der Wahrheit mehr zu nähern.

Aus p unabhängig von einander gemessenen Richtun-
n folgen nun nur $p - 1$ von einander unabhängige Win-
l. Demnach haben wir zur Bestimmung eines Polygons

hier $2p-2$ Stücke (Richtungen und Seiten) nothwen
dig zu messen, wobei freilich wieder 2 Seiten fehlen dürfe

Die Abzählung giebt uns nun mit Hülfe der n. 5
folgende Uebersicht:

Fall.	Ueberschüss. Stücke.	Seiten.	Richtungen.	Bedingung. 3. Kl.
I.	1	$p-1$	p	1
II.	1	p	$p-1$	1
III.	2	p	p	2

Für die Darstellung können wir nun

Zu III.

von den beiden Gleichungen ausgehen, welche wir b
der Coordinaten-Rechnung, wenn alles gemessen, oder d
Fehlende ergänzt ist, ohnehin zu gebrauchen gewohnt sin
und die in unserer, jetzt angenommenen und vielfältig ein
geübten, Bezeichnung so lauten:

$$(31) \qquad \begin{aligned} 0 &= [s \sin A] \\ 0 &= [s \cos A] \end{aligned}$$

Wir haben demnach hier nun einmal wieder einen Fall, w
wir unmittelbar auf unseren §. 58. zurückgehen können, den
diese Gleichungen (31) treten nun an die Stelle der dortige
(9). Daraus folgt, dafs unsere w jetzt nichts anderes sin
als die sogenannten Schlufsfehler, die wir ohnehin jedesm
berechnen, wenn wir mehr Beobachtungen gemacht habe
als unmittelbar nöthig sind, um uns entweder dabei zu b
ruhigen, oder um sie nach der bewufsten Methode zu ver
theilen.

Jetzt, wo wir eingesehen haben, dafs diese gewöhn
liche Vertheilungs-Methode in solchen Fällen, wo es a
wissenschaftliche Strenge ankommt, ganz unstatthaft is
bilden wir nun mit Hülfe der Schlufs-Fehler erst unsere Be
dingungsgleichungen. Es werden, in unserer gewohnte

urzen Bezeichnung ausgedrückt, aus den Gleichungen (11) es §. 58. durch Substitution in n. 43, die Bedingungs-leichungen:

$$0 = w_1 + \left[\frac{s \cos A \,.\, vA}{\varrho}\right] + [\sin A \,.\, vs]$$

$$0 = w_2 - \left[\frac{s \sin A \,.\, vA}{\varrho}\right] + [\cos A \,.\, vs]$$

Wir haben also, wenn alles gemessen ist, zum Ansatz kei-en Logarithmus aufzuschlagen, den wir bei Berechnung les Schlufsfehlers nicht doch schon gebrauchten. — Die veitere Rechnung geht dann den bekannten Weg des sechsten oder siebenten Kapitels.

Die beiden übrigen Fälle gestatten aber ein fast eben so leichtes Verfahren. Wir können sie dadurch auf las Vorige zurückführen, dafs wir zuerst in den Gleichun-gen (31) die Glieder s_n und A_n, von welchen jetzt eine als fehlend vorausgesetzt werden soll, absondern. Dadurch erhalten wir zunächst:

$$(32) \qquad \begin{aligned} 0 &= s_n \sin A_n + [s \sin A] \\ 0 &= s_n \cos A_n + [s \cos A] \end{aligned}$$

wo in den [ ] alle Glieder mit den Ordnungszahlen $n+1$ bis $n-1$ versammelt sind.

Multipliciren wir nun erst oben mit $\cos A_n$ unten mit $\sin A_n$ und subtrahiren; multipliciren sodann oben mit $\sin A_n$ unten mit $\cos A_n$ und addiren; so kommt uns:

$$(33) \qquad \begin{aligned} 0 &= [s \sin A] \cos A_n - [s \cos A] \sin A_n \\ 0 &= s_n + [s \sin A] \sin A_n + [s \cos A] \cos A_n \end{aligned}$$

Denken wir aber die aufser den [ ] befindlichen Factoren mit jedem einzelnen Gliede derselben verbunden und ziehen zusammen, so bekommen wir:

$$(34) \qquad \begin{aligned} 0 &= [s \sin (A - A_n)] \\ 0 &= s_n + [s \cos (A - A_n)] \end{aligned}$$

Dieses sind nun Formeln, die wir, nur in einer anderen Gestalt, ohnehin zu gebrauchen pflegen, wenn uns solche Fälle vorkommen, und wir brauchen sie also hier nur noch auf den Ansatz der Bedingungsgleichung anzuwenden.

Zu I.

pflegen wir nämlich, wenn alle Azimuthe beobachtet sind, aber eine Seite z. B. s_n fehlt, diese fehlende Seite als Abscissenlinie und ihren Endpunkt d. h. hier $n+1$ als Anfangspunkt der Coordinaten zu betrachten; also vorerst das beobachtete A_n von allen übrigen beobachteten A abzuziehen, dann aus der zweiten der beiden Formeln (34) das fehlende s_n zu berechnen, die erste dieser Formeln aber zur Berechnung des Schlufs-Fehlers zu benutzen, indem wir beidemal in den [ ] den s und A alle Ordnungszahlen von $n+1$ bis $n-1$ einschliefslich beilegen.

Bei unserer gegenwärtigen Aufgabe tritt nun aber die erste Formel von (34) an die Stelle der Gleichung (9) des §. 58. Wir erhalten dadurch also das verlangte w_{I} und rechnen bei der Gelegenheit auch die zweite Formel mit, in der Absicht das s_n zu finden und es nebst den Theilen, woraus es sich zusammensetzt, hernach in der Bedingungsgleichung zu gebrauchen. Die Differentiation der ersten Gleichung giebt uns nämlich unmittelbar:

$$0=\left[s\cos(A-A_n)\frac{\mathrm{d}A}{\varrho}\right]-\left[s\cos(A-A_n)\right]\frac{\mathrm{d}A_n}{\varrho}+\left[\sin(A-A_n)\mathrm{d}s\right]$$

Führen wir hierin das vorher gelegentlich mit berechnete s_n ein, vermittelst der zweiten Formel von (34), so erhalten wir an der Stelle der Gleichung n. 43:

$$0=w_{\text{I}}+\left[\frac{s}{\varrho}\cos(A-A_n)\,\mathrm{v}A\right]+\frac{s_n}{\varrho}\,\mathrm{v}A_n+\left[\sin(A-A_n)\,\mathrm{v}s\right]$$

welches also die verlangte Bedingungsgleichung ist.

Zu II.

Wenn alle Seiten beobachtet sind, aber ein Azimuth fehlt, pflegen wir das fehlende Azimuth aus den übrigen gessenen Stücken, mit Ausschlufs des s_n, zu berechnen, in- m wir der ersten der beiden Formeln (33) die Gestalt ben:

$$tang\, A_n = \frac{-[s \sin A]}{-[s \cos A]}$$

d dann den Schlufs-Fehler zu bestimmen, indem wir ent- der eine der beiden Formeln (32) oder die zweite der rmeln (34) zur Berechnung des gemessenen s_n anwenden. diesem zweiten Falle verringern wir also wieder alle A ı das nunmehr berechnete A_n, d. h. wir nehmen wieder s_n r Abscissenlinie und $n+1$ zum Anfangspunkt.

Wollen wir aber ausgleichen, so scheint es, wir müfs- ı das berechnete A_n ganz aus dem Spiele lassen, und also thwendig aus den Formeln (32) zuerst die Gleichung lden:

$$(35) \qquad 0 = s_n - \sqrt{[s \sin A]^2 + [s \cos A]^2}$$

mit das w_1 suchen, und dann durch Differentiation die edingungsgleichung bilden. Es scheint aber nur so. Denn innern wir uns, dafs s_n ganz unabhängig ist von der Lage r Abscissenlinie, und dafs wir also alle Azimuthe um eine liebige constante Hülfsgröfse vermehren oder vermindern nnen; so sehen wir gleich ein, dafs wir auch hier noch e zweite der Formeln (34) statt der Formel (9) des §. 58. brauchen dürften, wenn irgend ein Grund dazu vorläge. ir können sie also auch zum Behufe unserer Bedingungs- eichung geradezu differentiiren, müssen dabei aber das rher berechnete A_n als constant betrachten. Wir erhal- n auf diese Weise am Ende also die verlangte Bedingungs- eichung:

$$0 = w_1 - \left[\frac{s \sin (A - A_n)}{\varrho} \mathrm{v}A\right] + \left[\cos (A - A_n) \mathrm{v}s\right] + \mathrm{v}s$$

Ganz dasselbe kommt, nur auf einem weitläuftiger Wege, wenn wir (35) differentiiren und hernach erst A_n a willkührliche Hülfsgröfse einführen.

§. 106.

Zu den Rechnungs-Beispielen wähle ich ein Fall, wo ich mit meinen Zuhörern einen viereckigen Ack mit der Patent-Bussole aufnahm. Den mittleren Fehl eines mit diesem kleinen Instrumente bestimmten Azimuth setze ich nach früheren Erfahrungen 12′, während ich d mittleren Fehler der Längenmessung wie früher zu 0,1 a nehmen will. — Wir werden also bei der Berechnung u serer Coefficienten für ϱ die Zahl $\frac{\varrho}{720}$ einführen und alle Lä genmaafse gleich vom Anfange in Zehntel-Ruthen ausdr cken können, da wir ohnehin doch hier auch die schar Rechnung mit fünf Decimalen machen.

Wir setzen hier wieder voraus, dafs den Beobachtu gen gleiche Genauigkeit zukommt; fände das Gegenth statt, so würden wir nur, nach dem Ansatze, die Rege des siebenten Kapitels statt des sechsten zu befolgen habe

Beispiel zu III.

Es war

Gemessen.

$A_1 = 180^\circ\ 42'$	$s_1 = 820{,}0$	Zehntel-Ruthen
$A_2 = 246\ 54$	$s_2 = 789{,}0$	-
$A_3 = 14\ 49$	$s_3 = 737{,}5$	-
$A_4 = 52\ 10$	$s_4 = 699{,}0$	-

Unsere scharfe Rechnung steht nun so:

$\log \sin A$	$\log \cos A$	$\log s$	$\log \Delta y$	$\log \Delta x$	Δy	Δx
8,08696*n*	9,99997*n*	2,91381	1,00077*n*	2,91378*n*	— 10,02	—819,94
9,96370*n*	9,59366*n*	2,89708	2,86078*n*	2,49074*n*	—725,73	—309,56
9,40778	9,98531	2,86776	2,27554	2,85307	+188,60	+712,97
9,89752	9,78772	2,84448	2,74200	2,63220	+552,08	+428,75

$y_1 =$	0	$x_1 =$	0
$y_2 =$	− 10,02	$x_2 =$	− 819,94
$y_3 =$	− 735,75	$x_3 =$	− 1129,50
$y_4 =$	− 547,15	$x_4 =$	− 416,53
$w_1 =$	+ 4,93	$w_2 =$	+ 12,22

ur Berechnung unserer Bedingungsgleichungen haben wir ur zu den $\log \Delta x$ und $\log \Delta y$ noch den $\log \frac{720}{\varrho} = 7{,}54290$ u addiren, um die Coefficienten der vA in Logarithmen zu rhalten; so kommt:

für die erste Bedingungsgleichung.	für die zweite Bedingungsgleichung.
0,45668*n*	8,54367
0,03364*n*	0,40368
0,39597	9,81844*n*
0,17510	0,28490*n*

Die Logarithmen der Coefficienten für die vs stehen als $\log \sin A$ und $\log \cos A$ schon da. — Wollen wir nun zum Ueberflusse die beiden Bedingungsgleichungen auch noch in Zahlen aufschreiben, was eigentlich nicht nöthig wäre, weil wir mit den Logarithmen gleich weiter rechnen könnten; so stehen sie demgemäfs so:

$$0 = +4{,}93 - 2{,}8621\,\mathrm{v}A_1 - 1{,}0805\,\mathrm{v}A_2 + 2{,}4887\,\mathrm{v}A_3 + 1{,}4966\,\mathrm{v}A_4 - 0{,}0122\,\mathrm{v}s_1 - 0{,}9198\,\mathrm{v}s_2 + 0{,}2557\,\mathrm{v}s_3 + 0{,}7898\,\mathrm{v}s_4$$

$$0 = +12{,}22 + 0{,}0350\,\mathrm{v}A_1 + 2{,}5332\,\mathrm{v}A_2 - 0{,}6583\,\mathrm{v}A_3 - 1{,}9271\,\mathrm{v}A_4 - 0{,}9999\,\mathrm{v}s_1 - 0{,}3923\,\mathrm{v}s_2 + 0{,}9667\,\mathrm{v}s_3 + 0{,}6134\,\mathrm{v}s_4$$

Setzen wir nun nach Maafsgabe des sechsten Kapitels die Rechnung fort, so kommen die Normalgleichungen:

$$0 = +\ 4{,}93 + 19{,}328\,\kappa_1 - 6{,}255\,\kappa_2$$
$$0 = +12{,}22 - 6{,}255\,\kappa_1 + 13{,}030\,\kappa_2$$

Hieraus folgen durch Elimination die Correlaten:

$$\kappa_1 = -0{,}66132 \text{ und } \kappa_2 = -1{,}25531$$

und endlich mit Hülfe der Correlatengleichungen die Verbesserungen:

$$v\mathcal{A}_1 = +1{,}849 = +22'\ 11'' \qquad vs_1 = +1{,}263 \text{ Zehntel-R.}$$
$$v\mathcal{A}_2 = -2{,}465 = -29\ 35 \qquad vs_2 = +1{,}101 \text{ -}$$
$$v\mathcal{A}_3 = -0{,}819 = -\ 9\ 50 \qquad vs_3 = -1{,}383 \text{ -}$$
$$v\mathcal{A}_4 = +1{,}429 = +17\ 9 \qquad vs_4 = -1{,}292 \text{ -}$$

Bringen wir diese Verbesserungen nun gehörig an, so entsteht das

Ausgeglichene Polygon:

$$\mathcal{A}_1 = 181^\circ\ 4'\ 11'' \qquad s_1 = 82{,}126 \text{ Ruthen}$$
$$\mathcal{A}_2 = 246\ 24\ 25 \qquad s_2 = 79{,}010 \text{ -}$$
$$\mathcal{A}_3 = 14\ 39\ 10 \qquad s_3 = 73{,}612 \text{ -}$$
$$\mathcal{A}_4 = 52\ 27\ 9 \qquad s_4 = 69{,}771 \text{ -}$$

Wiederholen wir hierbei unsere scharfe Rechnung, so kommt am Ende:

$$w_1 = +0{,}002 \text{ und } w_2 = +0{,}006 \text{ Ruthe.}$$

Die Schlufsfehler, die früher so bedeutend waren, sind also bis auf die Kleinigkeit, die immer bei dergleichen Rechnungen unvermeidlich durch die Abrundungen herbeigeführt wird, verschwunden.

Beispiel zu I.

Sey wieder

Gemessen.

$$\mathcal{A}_1 = 180^\circ\ 42' \qquad s_1 = 820{,}0 \text{ Zehntel-Ruthe}$$
$$\mathcal{A}_2 = 246\ 54 \qquad s_2 = 789{,}0 \text{ -}$$
$$\mathcal{A}_3 = 14\ 49 \qquad s_3 = 737{,}5 \text{ -}$$
$$\mathcal{A}_4 = 52\ 10 \qquad s_4 \text{ fehlt}$$

o stellt sich die Rechnung so:

$-A_n$	$\log\sin(A-A_n)$	$\log\cos(A-A_n)$	$\log s$	$\log \Delta y$	$\log \Delta x$	Δy	Δx
8 32	9,89334	9,79447*n*	2,91381	2,80715	2,70828*n*	+641,43	−510,83
4 44	9,40538*n*	9,98548*n*	2,89708	2,30246*n*	2,88256*n*	−200,66	−763,07
2 39	9,78296*n*	9,90034	2,86776	2,65072*n*	2,76810	−447,42	+586,27
					7,54290	w_1=−6,65	s_4=687,63

$\log s_4 = 2{,}83736$

$\log \frac{720}{\varrho} = 7{,}54290$

lso sind die Logarithmen der Coefficienten in der Bedingungsgleichung der Reihe nach:

$$0{,}25118n$$
$$0{,}42546n$$
$$0{,}31100$$
$$0{,}38026$$
$$9{,}89334$$
$$9{,}40538n$$
$$9{,}78296n$$

der es ist die Bedingungsgleichung, vollständig aufgeschrieben:

$$= -6{,}65 - 1{,}7832\,v A_1 - 2{,}6636\,v A_2 + 2{,}0464\,v A_3 + 2{,}4003\,v A_4 + 0{,}7822\,v s_1 - 0{,}2543\,v s_2 - 0{,}6067\,v s_3$$

ie Normalgleichung wird:

$$0 = -6{,}65 + 21{,}2678\,\kappa_1$$

lieraus wird $\log \kappa_1 = 9{,}49510$ und daraus, indem wir die erbesserungen wie oben berechnen, das

Ausgeglichene Polygon:

A_1	=	180 35 19	s_1	=	82,0245 Ruthen
A_2	=	246 44 0	s_2	=	78,8920 -
A_3	=	14 56 41	s_3	=	73,7261 -
A_4	=	52 19 0	s_4		(68,612) -

Die Wiederholung der scharfen Rechnung giebt dann

$w_1 = +0{,}003$ Ruthe und s_4 so, wie es zu etwaigem künftigen Gebrauche in Parenthese beigeschrieben ist.

Beispiel zu II.

Sey endlich:

Gemessen.

$A_1 = 180^\circ\,42'$ $s_1 = 820{,}0$ Zehntel-Ruthen
$A_2 = 246\;54$ $s_2 = 789{,}0$ -
$A_3 = 14\;49$ $s_3 = 737{,}5$ -
A_4 fehlt $s_4 = 699{,}0$ -

So haben wir wieder zuerst:

log sin A	*log cos A*	*log s*	*log Δy*	*log Δx*	*Δy*	*Δx*
8,08696*n*	9,99997*n*	2,91381	1,00077*n*	2,91378*n*	— 10,02	—819,94
9,96370*n*	9,59366*n*	2,89708	2,86078*n*	2,49074*n*	—725,73	—309,56
9,40778	9,98531	2,86776	2,27554	2,85307	+188,60	+712,97

$y_1 = 0$ $x_1 = 0$
$y_2 = -10{,}02$ $x_2 = -819{,}94$
$y_3 = -735{,}75$ $x_3 = -1129{,}50$
$y_4 = -547{,}15$ $x_4 = -416{,}53$

Nun berechnen wir A_4, was uns für jetzt blofs als Hülfsgröfse dienen soll und damit s_4, was uns den Widerspruch entdecken mufs.

$log - y_4 = 2{,}73811$ $A_4 = 52\;43\;9$
$log - x_4 = 2{,}61965$ $s_4 = 687{,}67$
$log\ tang\ A_4 = 0{,}11846$ $w_1 = +11{,}33$
$log\ sin\ A_4 = 9{,}90073$
$log\ s_4 = 2{,}83738$

Das eben gewonnene A_4 ziehen wir nun zum Behufe der Bedingungsgleichung von den übrigen A ab und erhalten:

$A-A_n$	$sin(A-A_n)$	$cos(A-A_n)$	*log s*	*log Δy*	*log Δx*	*Δy*	*Δx*
127 58 51	9,89665	9,78916*n*	2,91381	2,81046	2,70297*n*	+646,34	—504,62
194 10 51	9,38913*n*	9,98656*n*	2,89708	2,28621*n*	2,88364*n*	—193,29	—764,97
322 5 51	9,78839*n*	9,89710	2,86776	2,65615*n*	2,76486	—453,06	+581,91
				7,54290*n*		— 0,01	—687,68

Die Berechnung der beiden letzten Columnen wäre offenbar für unseren nächsten Zweck nicht nothwendig, wir machen sie aber gelegentlich mit, um die Prüfung alles bisher gerechneten, die sich von selbst darbietet, nicht verloren gehen zu lassen.

Die Logarithmen für die Coefficienten der Bedingungsgleichung sind nun der Reihe nach:

$$\begin{array}{l} 0{,}35336n \\ 9{,}82911 \\ 0{,}19905 \\ 9{,}78916n \\ 9{,}98656n \\ 9{,}89710 \\ 0{,}00000 \end{array}$$

ler die verlangte Bedingungsgleichung wird:

$$\begin{aligned} 0 = {} & +11{,}33 - 2{,}2561\,\mathrm{v}A_1 + 0{,}6747\,\mathrm{v}A_2 + 1{,}5814\,\mathrm{v}A_3 \\ & - 0{,}6154\,\mathrm{v}s_1 - 0{,}9695\,\mathrm{v}s_2 + 0{,}7890\,\mathrm{v}s_3 + \mathrm{v}s_4 \end{aligned}$$

ie Normalgleichung:

$0 = +11{,}33 + 10{,}9874\,\kappa_1$ giebt $log\,\kappa_1 = 0{,}01333n$

ndlich erhalten wir das:

Ausgeglichene Polygon.

$$\begin{array}{llll} A_1 = 181\ 9\ 55 & s_1 = 82{,}0635 \text{ Ruthe} \\ A_2 = 246\ 45\ 39 & s_2 = 79{,}0000 \text{ -} \\ A_3 = 14\ 29\ 26 & s_3 = 73{,}6686 \text{ -} \\ A_4 \quad (53\ 6\ 56) & s_4 = 69{,}7969 \text{ -} \end{array}$$

Wiederholen wir hiermit unsere scharfe Rechnung, so kommt $= 69{,}797$; der Widerspruch ist also verschwunden.

§. 107.

Die Polygonmessung mit Azimuth-Uebertragung geht bekanntlich von der Absicht aus, vermittelst gewöhnlicher Winkel-Instrumente, also namentlich kleiner

Theodolithen, die Azimuthe unmittelbar bei der Messun
abzulesen, um die Coordinaten-Rechnung in Beziehung a
die Mittags-Linie dann eben so zu machen, wie wir sie
Beziehung auf den magnetischen Meridian bei Compafs
Messungen zu machen gewohnt sind.

Zu dem Ende geht man (um das Verfahren den Le
sern, die es etwa nicht gleich gegenwärtig hätten, ins Ge
dächtnifs zu rufen), von einem Punkte 1 aus, der selb
Dreieckspunkt eines vorher berechneten Triangulirungs-Sy
stemes ist, an welchem also wenigstens zwei Gesichtslinie
desselben zusammentreffen, deren Azimuth bekannt ist. Dan
stellt man den *Nonius I.* auf den Punkt der Theilung, welch
einem dieser Azimuthe entspricht, und bewegt den Lim
buskreis, bis man den zugehörigen Punkt zwischen den Fä
den hat. Dadurch ist also der Limbus in die Lage gebrach
die er haben mufs, damit *Non. I.* auf 0° stehe, wenn da
Fernrohr im Meridian ist, (der Theodolith „ist orientirt"
In dieser Lage bleibt nun der Limbus fest, während der Al
hidadenkreis herumgeführt wird, um das Fernrohr erst a
den folgenden Punkt 2 zu bringen, wo man denn an de
Non. I. unmittelbar das Azimuth A_1 abliest. Hernach wir
dann das Fernrohr, bei unverrücktem Limbuskreise, auc
noch auf den vorhergehenden letzten Punkt (0 oder p) ein
gestellt, und am *Non. I.* abgelesen, was also $180° + A_0$ gieb
(oder auch von *Non. II.*, der dem *Non. I.* diametral gegen
überliegend vorausgesetzt wird, unmittelbar A_0). — Nu
schreitet man zu dem folgenden Punkte 2 vorwärts, stellt de
Non. II. auf das in 1 abgelesene Azimuth A_1, orientirt de
Limbuskreis durch Zurück-Visiren auf den vorhergehende
Punkt 1, stellt den Limbus in dieser Orientirung fest, visir
auf den nächstfolgenden Punkt 3 und liest am *Non. I.* da
Azimuth A_2 ab. — Auf diese Weise fährt man nun vor

unkt zu Punkt fort, bis man am letzten Punkte (p oder 0) as Azimuth A_p an dem *Non. I.* bekommt. Dieses letzte zimuth verglichen mit dem am ersten Punkte bestimmten ' giebt nun einen Schluſs-Fehler, der dann eine gewisse, ach den Umständen instructionsmäſsig festgesetzte, Gränze icht überschreiten darf, wenn die Arbeit für annehmbar efunden werden soll, und man sich also dabei beruhigen ann.

Dieses Verfahren beruht also wesentlich darauf, die ben mit r bezeichneten äuſseren Winkel des Polygons unittelbar zu messen, und nur das nachherige Zusammense-zen dieser r zu reducirten Winkeln oder Azimuthen durch ehandlung des Instrumentes zu ersparen. — Die Orienrung bei dem ersten Punkte ist also ein dem Schlusse des olygons fremdes Geschäft, welches ohnehin vorgenommen erden müſste, wenn auch die Winkel ganz unabhängig von en früheren Einstellungen beobachtet wären. Das Zurücksiren vom ersten Punkte auf den letzten bewirkt bloſs die lessung des r_{I} oder α_{I} und somit erscheint dies ganze Verhren im Grunde nur als eine andere Form für das in §. 102. nd 103. betrachtete.

Ein Umstand pflegt nun aber noch in den deshalbigen nstructionen vorzukommen, der bisher noch nicht erwähnt urde. Man schreibt nämlich vor, daſs, wenn sich beim mziehen des Polygons ein Standpunkt findet, der selbst ieder ein Dreieckspunkt ist, dann hier eine neue Orientiung vorgenommen werden soll, um sie mit der übertragenen u vergleichen (wo sie dann innerhalb einer vorgeschriebeen Gränze stimmen muſs) und für das Folgende von ihr alin auszugehen. Diese Erneuerung der Orientirung wollen ir aber vor der Hand ganz bei Seite setzen, um demnächst arauf zurückzukommen.

Läge nun aber eine nach dieser Methode bearbeitete Figur uns zur Ausgleichung vor, so würden wir nach dem Vorhergehenden über den Ansatz der deshalbigen Bedingungsgleichungen nicht mehr zweifelhaft seyn.

Sind nämlich die Azimuthe vollständig so abgelesen, wie oben beschrieben, so haben wir durch Abziehung je zweier zusammengehöriger die sämmtlichen r, also, je nachdem keine oder eine oder zwei Seiten fehlen, den Fall VI., IV. oder I. des §. 102.

Ist A_0 nicht eingestellt, so fehlt auch r_1, wir haben also den Fall V. oder II.

Fehlt uns aufser A_0 noch ein Azimuth, so kann dieses nur A_p seyn, indem wegen der Einrichtung des Verfahrens das Fehlen eines anderen Azimuthes auch das Fehlen aller übrigen zur Folge haben würde. Es fehlten also jetzt r_1 und r_p und wir hätten den Fall III., wenn alle Seiten gemessen sind, also nur ein überschüssiges Stück in der Figur ist.

Sollte endlich aufser A_0 und A_p auch noch A_{p-1} fehlen, so hätten wir selbst bei Messung aller Seiten kein überschüssiges Stück mehr und fiele also alle Ausgleichung weg.

Rechnungs-Beispiele werden nach allem, was früherhin vorgekommen, hier nicht mehr nöthig seyn.

§. 108.

Wir knüpfen hier noch einige practische Bemerkungen an.

1) Die Polygonmessung ist im Vorhergehenden unter der Voraussetzung vorgetragen, dafs das Polygon für sich allein selbständig gemessen und nur die Orientirung, als ein fremdes Geschäft, hinzugekommen sey, weil dabei die Methode zur vollständigen Anwendung kommt. Dies ist aber nicht gerade der Fall, welcher da vorzukommen pflegt, wo

man gewissenshalber eine mehr als gewöhnliche und instructionsmäfsige Genauigkeit zu erstreben suchen und also gerade die Ausgleichungs-Rechnung zu Hülfe rufen wird.

In den wichtigsten Fällen pflegt nämlich ein polygonometrischer Zug von einem gegebenen trigonometrischen Punkte aus zu einem zweiten gegebenen zu gehen, so dafs es sich nur um eine Einschaltung der zwischenliegenden Punkte handelt. Solcher Fall kommt z. B. dem Katastergeometer vor, wenn zwischen zwei gegebenen, vielleicht meilenweit von einander entfernten, trigonometrischen Punkten eine Gränze durch den Wald geht, oder dem Strafsenbaumeister, welcher den Weg zwischen zwei solchen Punkten mit Hodometer und Compafs aufnimmt.

Die Ausgleichungsrechnung wird hier davon ausgehen müssen, Länge und Orientirung der geraden Linie zwischen beiden gegebenen trigonometrischen Punkten für's erste ganz scharf zu berechnen. Man hätte damit eine als absolut richtig zu betrachtende Seite in der Figur, würde also ganz so wie im Obigen zu verfahren und nur die Verbesserung dieser einen Seite in der Bedingungsgleichung $= 0$ zu setzen haben. — Die berechnete Orientirung diente dann dazu, um nach Vollendung der Ausgleichung die ganze Figur zu orientiren. Sind die beiden gegebenen Punkte von einander sichtbar, so kann man die beiden Polygon-Winkel an der als absolut genau betrachteten Linie (Grundlinie) unmittelbar messen; sind sie aber nicht von einander sichtbar, so ist die Messung dieser Winkel dadurch vermittelt, dafs man an jedem der beiden gegebenen Punkte den Winkel zwischen dem benachbarten Polygonpunkte und einem der trigonometrischen Punkte mifst, mit welchen der Standpunkt vermöge des Dreiecksnetzes zusammenhängt, und dann den Winkel der betreffenden trigonometrischen Visirlinien

mit der Grundlinie, welcher nun auch als absolut genau zu betrachten ist, zusetzt oder abzieht. — Im Falle der Compafsmessung wird man diese trigonometrischen Visirlinien aber benutzen, um die Angaben des Compasses auf wirkliche Azimuthe zu reduciren. — Es scheint mir nach dem, was in diesem Kapitel vorgetragen und durch Beispiele erläutert ist, nicht nöthig, über solche Einschaltungen auch noch Beispiele hinzuzufügen.

2) Aus der vorigen Bemerkung erhellt nun auch, wie wir es in dem §. 107. beiseite gesetzten Falle, der Orientirungs-Erneuerung, eigentlich zu halten haben, wenn wir mehr als alltägliche Genauigkeit suchen. — Kommen wir nämlich im Umfange des Polygons auf einen zweiten trigonometrischen Punkt, so ist auch aus dem Dreiecks-Netze die Sehne zwischen diesem Punkte und dem ersten, von welchem wir §. 107. immer ausgehen, gegeben und als absolut genau zu betrachten. Unser Polygon zerfällt also in zwei Hälften, welche nach der vorigen Anmerkung einzeln zu behandeln, d. h. zwischen die beiden gegebenen Punkte einzuschalten sind. — Wenn aufser dem ersten trigonometrischen Punkte sich mehrere (z. B. n) solche Punkte im Umfange der Figur finden, so haben wir offenbar zwischen ihnen ein Polygon (von $n+1$ Seiten) vor uns, an welchem unsere dermalige Polygonmessung nichts mehr ändern kann und soll, weil wir dasselbe aus dem Dreiecks-Netze berechnen können und dann als absolut genau anzunehmen haben. — Es kommt also, (statt der n maligen Orientirungs-Erneuerung) in solchem Falle nur die obige erste Bemerkung $(n+1)$ mal zur Anwendung.

3) Wenn mehrere Polygone an einander gränzen, so fragt es sich zuerst, ob mehr als ein (zur Orientirung zu benutzender) trigonometrischer Punkt darin vorkommt oder

nicht. Ist diese Frage zu bejahen, so berechnen wir wieder die Linien-Verbindung zwischen den trigonometrischen Punkten aus dem Dreiecks-Netze, betrachten sie also als absolut genau und schalten dann nach der ersten Bemerkung die einzelnen polygonometrischen Züge dazwischen ein. — Wenn aber nur ein trigonometrischer Punkt in unseren sämmtlichen zusammengränzenden Polygonen vorkommt, so werden wir sie sämmtlich in einer Ausgleichungsrechnung zusammenzufassen haben, auf ähnliche Weise, wie wir es im zehnten Kapitel bei Dreiecks-Verbindungen gemacht haben. — Wir werden also die vorliegende Linien-Verbindung erst in einzelne Polygone zu zerlegen und die von einander unabhängigen Bedingungen nach Maafsgabe der in diesem Kapitel vorgetragenen Regeln aufzusuchen und zu Bedingungsgleichungen zu verarbeiten haben, die dann, alle zusammen, nach der oft angewandten Methode weiter zu behandeln sind.

Ich zweifle sehr, ob dieser letzte Fall oft in der Praxis vorkommen wird, (mir selbst ist er noch nie vorgekommen), glaube aber, dafs er alsdann nach dem, was bis jetzt in diesem Buche abgehandelt ist, auch keine Schwierigkeit mehr darbieten kann, welche eine besondere Ausführung oder ein Rechnungs-Beispiel erheischte.

4) Die Markscheiderzüge haben mit der Polygonmessung durch Compafsstriche grofse Aehnlichkeit, so lange man sich bei denselben des Gruben-Compasses bedient. Wenn man aber, wie ich höre, dafs es hin und wieder im Werke seyn soll, kleine Theodolithen dabei einführt, so wird man sie mit den Polygonmessungen durch einzelne Winkel oder durch Azimuth-Uebertragung zu vergleichen haben. Immer aber bleibt der wesentliche Unterschied, dafs die gemessenen Seiten des Zuges nicht in einer Ebene lie-

gen. Man hat also an jedem Punkte aufser den A und s auch noch die Neigung der Seite (welche n heifsen mag) zu messen, und demgemäfs für jeden Punkt aufser den beiden horizontalen Coordinaten (y = Streich-Sinus und x = Streich-Cosinus) noch die dritte Coordinate (z = Seigerteufe) zu bestimmen.

Für den Fall nun, dafs ein solches mit dem Gruben-Compafs abgezogenes Polygon der Ausgleichung unterworfen werden sollte, würde wohl vorerst rathsam seyn, die Azimuthe, ganz so wie in der practischen Geometrie sonst gebräuchlich ist, rund um von 0° bis 360° zu zählen. Dann hätte man statt der beiden Formeln (31) des §. 105. die drei Formeln:

$$(36)\qquad \begin{aligned} 0 &= [s \sin A \cos n] \\ 0 &= [s \cos A \cos n] \\ 0 &= [s \sin n] \end{aligned}$$

von welchen bei der Differentiation auszugehen wäre. Man erhielte hier einen in drei Coordinaten ausgedrückten Schlufs-Fehler und bekäme nach §. 58. für n. 43

$$0 = w_1 + \left[\frac{s}{\varrho} \cos A \cos n \,.\, \mathrm{v}A\right] - \left[\frac{s}{\varrho} \sin A \sin n \,.\, \mathrm{v}n\right] + \left[\sin A \cos n \,.\, \mathrm{v}s\right]$$

$$0 = w_2 - \left[\frac{s}{\varrho} \sin A \cos n \,.\, \mathrm{v}A\right] - \left[\frac{s}{\varrho} \cos A \sin n \,.\, \mathrm{v}n\right] + \left[\cos A \cos n \,.\, \mathrm{v}s\right]$$

$$0 = w_3 \qquad + \left[\frac{s}{\varrho} \cos n \,.\, \mathrm{v}n\right] \quad + \left[\sin n \,.\, \mathrm{v}s\right]$$

Man würde also in Fällen, wo alles gemessen ist, unmittelbar zu den Correlaten-Gleichungen u. s. w. fortschreiten können.

Ich glaube mich auf diese Andeutung hier beschränken und alle weitere Ausführung den Lesern, welche Erfahrung in Markscheider-Arbeit haben, überlassen zu können. Um so mehr als bis jetzt eine solche Polygonometrie des Raumes, (die ich als wissenschaftliches Desiderat immer denje-

nigen Zuhörern, die dazu vorbereitet schienen, bezeichnet
nabe,) meines Wissens wenigstens, nicht für die Praxis aus-
gearbeitet ist.

Dagegen mag diese Bemerkung zur Rechtfertigung der
m Ende des §. 33. ausgesprochenen Bedenken dienen.
Denn wir übersehen nun, dafs zur Feststellung des Ge-
richtes eines durch Markscheiderzüge bestimmten Gefälles,
erst die Ausmittelung der mittleren Fehler der gemessenen
A, *s* und *n* und sodann die Anwendung der Regeln des ach-
en Kapitels gehören würde.

Nachtrag.

Elimination aus den Normalgleichungen.

§. 109.

Nachdem nun das Wichtigste über die Anwendung der Ausgleichungs-Rechnung vorgetragen ist, scheint es zweckmäfsig, jetzt auf die Elimination zurückzukommen und somit das nachzutragen, was wir §. 43. und 59. absichtlich einstweilen mit Stillschweigen übergingen.

Dies scheint um so mehr nöthig, als das Eliminiren bei der practischen Ausführung dieser Rechnungen den beschwerlichsten und zeitraubendsten Theil der Arbeit ausmacht, so dafs man dabei immer unwillkührlich zu dem Wunsche gedrängt wird: es möge der Wissenschaft dereinst gelingen, Hülfsmittel aufzufinden, welche für dieses Geschäft so kräftige Erleichterungen gewährten, wie die Multiplication u. s. w. durch Erfindung der Logarithmen erfuhr.

Wir wollen nun hier zuerst den schon §. 43. erwähnten Gaufsischen Eliminations-Proceſs vornehmen. Dieser setzt voraus, dafs man direct eliminiren wolle, und läfst sich, insofern man blofs dies Geschäft an sich im Auge hat, ohne auf weitere zum Theil sehr wichtige Neben-Vortheile Rück-

:ht zu nehmen, ganz elementar auf folgende Haupt-Um-
inde zurückführen.

1) Wenn wir i wirklich verschiedene, ganz beliebige,
ieare Gleichungen für i unbekannte Größen haben (wo wir
ispielsweise $i = 4$ setzen wollen):

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} A &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 u + N_1 = 0 \\ B &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 u + N_2 = 0 \\ C &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 u + N_3 = 0 \\ D &= \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 u + N_4 = 0 \end{aligned}$$

kommt es jedenfalls zunächst darauf an, aus ihnen $i-1$
idere Gleichungen zu finden, in denen kein x mehr ent-
ılten ist. Diesen Zweck erreichen wir nach der gewöhn-
:hen Substitutions-Methode, wenn wir aus $A=0$ erst den
'erth von x, ausgedrückt in den übrigen Unbekannten,
chen und diesen Werth in alle übrigen Gleichungen setzen.
ieses giebt uns also die Gleichungen ohne x:

$$B - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} A = 0;\quad C - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A = 0;\quad D - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} A = 0$$

ler ausgeführt:

$$\left(\beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1\right) y + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\gamma_1\right) z + \left(\delta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta_1\right) u + \left(N_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} N_1\right) = 0$$

$$\left(\beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\beta_1\right) y + \left(\gamma_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\gamma_1\right) z + \left(\delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\delta_1\right) u + \left(N_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} N_1\right) = 0$$

$$\left(\beta_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\beta_1\right) y + \left(\gamma_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\gamma_1\right) z + \left(\delta_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1}\delta_1\right) u + \left(N_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} N_1\right) = 0$$

urz:

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} B_1 &= \varepsilon_1 y + \zeta_1 z + \vartheta_1 u + S_1 = 0 \\ C_1 &= \varepsilon_2 y + \zeta_2 z + \vartheta_2 u + S_2 = 0 \\ D_1 &= \varepsilon_3 y + \zeta_3 z + \vartheta_3 u + S_3 = 0 \end{aligned}$$

'erfahren wir nun mit dem System II. eben so, wie vorher
nit dem Systeme I, so kommt uns:

durch $C_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} B_1 = 0$ und $D_1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} B_1 = 0$

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} C_2 &= \eta_1 z + \iota_1 u + T_1 = 0 \\ D_2 &= \eta_2 z + \iota_2 u + T_2 = 0 \end{aligned}$$

Wenden wir nun endlich dasselbe Verfahren auch hier wieder an, so kommt uns zuletzt durch $D_2 - \frac{\eta_2}{\eta_1} C_2 = 0$ die Endgleichung:

$$\text{(IV)} \qquad D_3 = \varkappa_1 u + U_1 = 0$$

In den Gleichungen: $A = 0$, $B_1 = 0$, $C_2 = 0$, $D_3 = 0$

besitzen wir nun ein System von Gleichungen, deren jede folgende eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende, so dafs wir aus der letzten den Zahlen-Werth für u finden können, dann durch Substitution dieses Werthes in die vorletzte, den Zahlen-Werth für z u. s. w.

2) Im Wesentlichen ist dies, wie wir gleich sehen, kein anderes Verfahren, als welches wir schon §. 44. und §. 49. bei dem zweiten Rechnungs-Beispiele zur Anwendung brachten. Dort haben wir nun aber noch einen Umstand mit Stillschweigen übergangen, den wir hier zur Sprache bringen müssen.

Wir rechneten nämlich dort, und auch jetzt wieder hier, als ob die Coefficienten in unseren Gleichungen alle von einander unabhängig und ganz willkührlich wären, und hätten also in I. $i_2 + i$ Zahlen-Werthe, in II. $(i-1)^2 + (i-1)$ Zahlen-Werthe u. s. w. bis zuletzt in der Endgleichung 2 Zahlen-Werthe in Betracht zu ziehen. (Diese sämmtlich zusammengezählt, geben nach anderweit bekannten, hier nicht weiter zu entwickelnden Sätzen die Anzahl $\frac{i(i+1)(2i+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$).

Unsere Normalgleichungen n. 34 und 45 so wie auch alle daraus abzuleitenden, n. 36; n. 41; n. 48; n. 51

d n. 54 lassen aber vermöge der Symmetrie ihrer Coef-
ienten noch eine Abkürzung zu. Wir können bei der des-
lbigen Ableitung, ohne der Allgemeinheit zu schaden, die
rmen zum Grunde legen, die sich auf Beobachtungen von
eicher Genauigkeit beziehen, da die übrigen nur in den
hlenwerthen der Coefficienten, nicht in der symmetrischen
ordnung derselben, verschieden sind. Nehmen wir nun
n. 34 zum Muster, so haben wir statt der obigen will-
hrlich angenommenen Form, indem wir für α, β, γ, δ ihre,
serer Normalgleichung entsprechenden, Werthe setzen,
e Form:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} A &= [aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]u+[an]=0\\ B &= [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]u+[bn]=0\\ C &= [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cd]u+[cn]=0\\ D &= [ad]x+[bd]y+[cd]z+[dd]u+[dn]=0 \end{aligned}$$

d hier kommen nun (und dies ist das unserer dermaligen
limination aus Normalgleichungen Eigenthümliche) aufser
n absoluten Gliedern und aufser den Coefficienten $[aa]$;
$b]$ u. s. w. alle übrigen Coefficienten doppelt vor, indem
desmal das $(p+r)$te Glied der $p$ten Gleichung denselben
oefficienten haben mufs mit dem $p$ten Gliede der $(p+r)$ten
leichung. Wir haben also in I. nicht mehr i^2+i, sondern
ur $i^2+i-\frac{i(i-1)}{1\,.\,2}=\frac{i(i+3)}{1\,.\,2}$ wirklich verschiedene Zahlen-
erthe in der Gleichung.

Diese Eigenschaft der Coefficienten in dem Systeme (I)
flanzt sich nun aber bei der obigen Eliminations-Weise
othwendig auch auf die folgenden abgeleiteten Systeme
rt. Wir können uns davon leicht überzeugen, wenn wir
ur nachsehen, wie (II) aus (I) gebildet wurde. Haben
ir nämlich in (I) die selbständigen Werthe:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & & & N_1 \\ \alpha_2 = \beta_1 & \beta_2 & & N_2 \\ \alpha_3 = \gamma_1 & \beta_3 = \gamma_2 & \gamma_3 & N_3 \\ \alpha_4 = \delta_1 & \beta_4 = \delta_2 & \gamma_4 = \delta_3 & \delta_4 \quad N_4 \end{array}$$

so entstehen vermöge der Ableitung die neuen selbständige Zahlen:

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_1 & & & S_1 \\ \varepsilon_2 = \zeta_1 & \zeta_2 & & S_2 \\ \varepsilon_3 = \vartheta_1 & \zeta_3 = \vartheta_2 & \vartheta_3 & S_3 \end{array}$$

und wir haben in (II) nun $\frac{(i-1)(i+2)}{1 \cdot 2}$ wirklich verschiedene Zahlen-Werthe.

So geht es von (II) zu (III) fort u. s. w. und am End haben wir bis zur Endgleichung nur $\frac{i(i+1)(i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ verschiede ne Werthe, (vermöge derselben Lehrsätze, die wir hie blofs anführen, ohne sie zu beweisen).

3) Soll nun bei der numerischen Ausführung in de verschiedenen Systemen alle Wiederholung von solche Zahlen-Werthen, welche sonst noch vorkommen, abge schnitten und die Uebersicht immer aufrecht erhalten wer den, so bedient man sich dazu am bequemsten der von *Gauf* eingeführten Bezeichnungs-Weise, indem man erst die wirk lich verschiedenen Zahlen-Werthe in (I) bildet, und so dann setzt für das System (II):

$$[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ab]=[bb.1]$$

$$[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ac]=[bc.1] \qquad [cc]-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ac]=[cc.1]$$

$$[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ad]=[bd.1] \qquad [cd]-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ad]=[cd.1] \qquad [dd]-\frac{[ad]}{[aa]}\cdot[ad]=[dd.1$$

zuletzt dann noch:

$$[bn]-\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[an]=[bn\,.\,1]$$

$$[cn]-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot[an]=[cn\,.\,1]$$

$$[dn]-\frac{[ad]}{[aa]}\cdot[an]=[dn\,.\,1]$$

ıd eben so fort, wenn mehr als 4 unbekannte Gröfsen aus
ın Normalgleichungen zu finden wären.

Dieses giebt also das System:

$$\text{II)}\quad \begin{aligned} B_{\text{I}} &= [bb\,.\,1]y+[bc\,.\,1]z+[bd\,.\,1]u+[bn\,.\,1]=0\\ C_{\text{I}} &= [bc\,.\,1]y+[cc\,.\,1]z+[cd\,.\,1]u+[cn\,.\,1]=0\\ D_{\text{I}} &= [bd\,.\,1]y+[cd\,.\,1]z+[dd\,.\,1]u+[dn\,.\,1]=0 \end{aligned}$$

iermit geht man nun nach derselben Rechnungs- und Be-
ichnungsweise zu dem folgenden Systeme über, und hat
so:

$$\cdot\,.\,1]-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\cdot[bc\,.\,1]=[cc\,.\,2]$$

$$i.\,1]-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\cdot[bd\,.\,1]=[cd\,.\,2]\qquad [dd\,.\,1]-\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\cdot[bd\,.\,1]=[dd\,.\,2]$$

$$[cn\,.\,1]-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\cdot[bn\,.\,1]=[cn\,.\,2]$$

$$[dn\,.\,1]-\frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\cdot[bn\,.\,1]=[dn\,.\,2]$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} C_2 &= [cc\,.\,2]z+[cd\,.\,2]u+[cn\,.\,2]=0\\ D_2 &= [cd\,.\,2]z+[dd\,.\,2]u+[dn\,.\,2]=0 \end{aligned}$$

$$[dd\,.\,2]-\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\cdot[cd\,.\,2]=[dd\,.\,3]$$

$$[dn\,.\,2]-\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\cdot[cn\,.\,2]=[dn\,.\,3]$$

$$\text{(IV)}\quad D_3=[dd\,.\,3]u+[dn\,.\,3]=0$$

ie Gleichungen, aus welchen wir also, von der letzten an-
ıngend, am Ende durch bloſse Substitution die verlangten
ahlenwerthe für die unbekannten Gröfsen finden, sind
ann:

$$\frac{A}{[aa]} = x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}u + \frac{[an]}{[aa]} = 0$$

$$\frac{B_1}{[bb\,.\,1]} = y + \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}z + \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}u + \frac{[bn\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} = 0$$

$$\frac{C_2}{[cc\,.\,2]} = z + \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}u + \frac{[cn\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} = 0$$

$$\frac{D_3}{[dd\,.\,3]} = u + \frac{[dn\,.\,3]}{[dd\,.\,3]} = 0$$

§. 110.

Wir haben hierüber noch folgende Bemerkungen z machen:

1) Diese eben vorgetragene Methode der directen Elim nation läfst sich in den beiden Fällen anwenden, bei we chen uns oben Normalgleichungen vorkamen. Bei Bea beitung vermittelnder Beobachtungen (im zweiten Abschnitt bedeuten die x; y u. s. w. also die Correctionen, deren d vorläufigen Elemente bedürfen, um auf die definitiven zu rückgeführt zu werden, und die n haben dieselbe Bedeutung welche wir ihnen im §. 42. beilegten. — Bei Bearbeitun bedingter Beobachtungen dagegen (im dritten Abschnitte sind die x; y u. s. w. nichts anderes als die gesuchte Correlaten, und an der Stelle der $[an]$; $[bn]$ u. s. w. sin die w im Sinne des §. 58. und 59. zu denken.

2) In dem ersten dieser beiden Fälle läfst sich nu aus den Coefficienten, die bei obigem directen Eliminire gebraucht werden, noch ein sehr erheblicher Vortheil zie hen, der im Grunde mit dem Eliminiren als solchen nichts gemein hat, und der hier nur historisch angedeute werden soll, um den Leser für künftiges Studium darauf auf merksam zu machen. Dieser Vortheil ist ein doppelter:

a) Bildet man nämlich noch die Hülfsgröfsen:

$$[nn] - \frac{[an]}{[aa]} \cdot [an] = [nn.1] \qquad [nn.2] - \frac{[cn.2]}{[cc.2]} \cdot [cn.2] = [nn.3]$$

$$n.1] - \frac{[bn.1]}{[bb.1]} \cdot [bn.1] = [nn.2] \qquad [nn.3] - \frac{[dn.3]}{[dd.3]} \cdot [dn.3] = [nn.4]$$

u. s. w.

is für i Elemente, also i unbekannte Gröfsen in den Nor-
algleichungen, die letzte $[nn.i]$ wird, so ist diese letzte
ülfsgröfse

$$[nn.i] = [vv]$$

Man erhält also diese, zu einem Minimum gemachte Summe
er Fehler-Quadrate, welche man doch am Ende zur Be-
immung der Genauigkeit u. s. w. braucht, hier gelegent-
ch der Elimination nebenher mit, und hat demnach, wenn
an sie nun doch noch direct sucht, eine scharfe Prüfung der
echnung.

b) Die Elimination, in der obigen Form geführt, giebt
dann auch unmittelbar das Gewicht des einen Elementes,
essen Correction sich zuletzt allein in einer Gleichung fin-
et. Dieses Gewicht ist nämlich unmittelbar der Coefficient
er betreffenden Correction in der Endgleichung. — Ha-
en wir also z. B. 4 Elemente E_1; E_2; E_3; E_4; so würde
ach unserer obigen Bezeichnung unser jetziges u die Cor-
ection des letzten Elementes E_4 bedeuten, und unser Sy-
tem IV. gäbe unmittelbar:

$$P_4 = [dd.3]$$

n Sinne des §. 47.

Wir ersparten also, insofern es uns blofs auf das Ge-
icht eines einzigen Elementes ankäme, durch diesen Eli-
inations-Procefs die Berechnung der Gewichts-Gleichung
. 36 ganz und gar, wenn wir nur bei Einleitung der Rech-
ung gleich dieses fragliche Element in der willkührlichen

Reihenfolge zum letzten machten. Wollten wir aber vo mehreren Elementen die Gewichte finden, so müfsten wi die ganze Eliminations-Arbeit, mit veränderter Reihen folge der Unbekannten, so oft wiederholen, dafs jedes de fraglichen Elemente einmal die letzte Stelle einnähme, un wir hätten also eben so wie bei der Berechnung der Gewichts Gleichungen n. 36 eine ganze Reihe von Eliminationen nac und nach zu machen. Bei jeder folgenden würden wir abe dann einen grofsen Theil der früheren Rechnungen imme wieder benutzen können, eben so wie §. 47. und 49., wenn wi nur einmal erst die Ordnung vollständig umgekehrt hätte

3) In dem zweiten der beiden angeführten Fäll (bei bedingten Beobachtungen), wo die Normalgleichunge uns die Correlaten geben, fällt der letzte Vortheil der Ge wichtsbestimmung gröfstentheils weg; denn wir suchen hie auf die im dritten Abschnitte angegebene Weise, unmittel bar die Correctionen der Beobachtungen, und können un den vorbereitenden Arbeiten des achten Kapitels namentlic des §. 74. nicht entziehen, wenn wir die Genauigkeit eine Function von ihnen suchen; obgleich wir auch bei der Be stimmung der Uebertragungs-Coefficienten jedesmal eine Theil der Eliminations-Rechnung aus den Normal-Glei chungen benutzen können.

Der ersterwähnte Vortheil, scharfe Prüfung der Rech nung vermittelst einer unmittelbaren Bestimmung des $[vv]$ läfst sich aber in diesem Falle durch eine Gleichung erlan gen, die unabhängig von dem Eliminations-Processe is und also bei jeder beliebigen Methode angewandt werde kann. Diese Gleichung wollen wir in Beziehung auf un seren §. 61. hier gelegentlich auch noch nachtragen.

Multipliciren wir nämlich unsere Bedingungsgleichun gen n. 43 der Reihe nach mit ihren Correlaten, und addiren

) erhalten wir zuerst ein Glied ohne v, die folgenden Glie-
er enthalten aber jedesmal ein v multiplicirt mit einem Aus-
rucke, welcher der betreffenden Correlaten-Gleichung ent-
pricht, so dafs wir am Ende haben:

$$0 = w_1 K_1 + w_2 K_2 + \ldots\ldots + v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + \ldots$$

der kurz

n. 60. $$0 = [wK] + [vv]$$

4) Ein Rechnungs-Beispiel von dieser directen Elimi-
ations-Methode hinzuzufügen, oder die verschiedenen
unstgriffe anzuführen, deren man sich bedient, um die je-
enfalls sehr mühselige Arbeit zu erleichtern, und sich ge-
en das Einschleichen von Rechnungsfehlern sicher zu stel-
n, scheint nicht nöthig. Der Leser findet alles dieses aus-
ihrlich vorgetragen in der Abhandlung von Encke *Ueber
ie Methode der kleinsten Quadrate* (im *Berliner astrono-
ischen Jahrbuch*). Namentlich ist 1835. S. 264. die
heorie der directen Elimination vollständig entwickelt, und
ndet sich 1836. S. 253. bis 273. alles, was sich auf die
ractische Ausführung bezieht, verbunden mit einem Rech-
ungsbeispiele für 4 Normalgleichungen. Es mag hier aber
och angemerkt werden, dafs sich ein von Bessel erfun-
enes Erleichterungs-Mittel für Berechnung der Normal-
leichungen aus den Bedingungsgleichungen und neue For-
eln von Jacobi, für die Elimination aus den ersteren,
ebst der Gewichtsbestimmung im Falle des zweiten Ab-
chnittes, in Schumacher's *astronomischen Nachrichten*
VII. S. 225. und 305. finden.

5) Ich kann zu dem oben Vorgetragenen aus eigener
rfahrung keinen weiteren Beitrag liefern, denn ich habe
ur einmal ein grofses Beispiel von directer Elimination aus
0 Normalgleichungen durchgearbeitet. Kleinere Beispiele

aus 2; 3 oder 4 Normalgleichungen können aber für die Praxis keine entscheidende Erfahrung darbieten, da sie so ziemlich gleiche Arbeit machen, man mag eliminiren wie man eben will. Jenes gröfsere Beispiel bot sich mir vor beinahe 20 Jahren bei Gelegenheit eines Horizont-Abschlusses dar, und ich schlug diesen Weg eigentlich blofs deshalb ein, weil mir das indirecte Eliminiren damals nur noch ganz vorläufig bekannt war. Eben gelegentlich dieses Beispieles und meiner Klage über die grofse Mühseligkeit dieser Arbeit, theilte mir *Gaufs* damals den §. 56. angeführten Kunstgriff mit, gab mir auch einige weitere Auskunft über seine Methode des indirecten Eliminirens, was ich späterhin immer ausschliefslich bei Eliminationen aus mehreren Normalgleichungen, namentlich also auch bei den 45 (*Beiträge* S. 167) angewandt habe.

Dieses indirecte Eliminiren, so wie ich es, gestützt auf gelegentliche Mittheilungen von *Gaufs*, und geleitet von einigen, zum Theil sehr mühsam erworbenen Erfahrungen, bis jetzt nach und nach zu machen gelernt habe, will ich nun ausführlich vortragen. Ich bevorworte aber, dafs es dabei gewifs noch mancherlei Abkürzungen und Vortheile giebt, welche ich bis jetzt nicht aufgefunden habe, und dafs ich also auch im Interesse meiner Leser nichts mehr wünschen kann, als dafs der berühmte Erfinder dieser Eliminations-Weise den Dank, den ihm alle Practiker ohnehin schulden, durch vollständige Bekanntmachung dieser Methode noch vermehren möge.

§. 111.

Das indirecte Eliminiren geht wie alle indirecte Methoden, deren wir uns in der Praxis ja selbst bei gewöhnlichen trigonometrischen Aufgaben bedienen, im Allgemei-

en von der Voraussetzung aus, dafs die zu findenden Grö-
en sehr klein oder schon beinahe = 0 seyen. — Diese
oraussetzung macht es also bei der Eliminations-Arbeit
öglich, für eine der gesuchten Gröfsen (dE oder κ)
nen Näherungs-Werth zu finden, indem man alle anderen
orläufig = 0 setzt. — Setzt man nun diesen so gefunde-
en Näherungs-Werth an die Stelle dieser einen gesuchten
röfse in alle gegebenen Gleichungen, verändert also dem-
emäfs die absoluten Glieder, so kann man mit um so grö-
erem Rechte die unbekannte Correction, deren diese erste
röfse nunmehr noch bedarf, = 0 setzen und von einer
weiten gesuchten Gröfse nun einen Näherungs-Werth
ichen u. s. w. Dies Verfahren bringt also nach und nach
lle gesuchten Gröfsen an die Reihe. Wir setzen es fort bis
lle absoluten Glieder verschwunden sind, oder vielmehr bis
e so klein geworden sind, dafs keine Correction mehr ge-
nden werden kann, welche eine zum Voraus gesetzte Gränze
berschritte; denn ein absolutes 0 ist schon wegen Unvoll-
tändigkeit der Decimal-Brüche nicht zu erreichen. Wir
ommen aber desto rascher zum Ziele, je strenger wir uns
n die Regel halten, dafs wir immer diejenige Gröfse zu-
rst vornehmen, welche nach einem gemachten Ueberschlage
en gröfsten Näherungs-Werth geben zu wollen scheint.

Für die Ausführung im Einzelnen sind nun folgende
unkte zu merken.

1) Bei der indirecten Elimination aus Normalgleichun-
en, die wir bei dem Horizont-Abschlusse zu ma-
hen gewohnt sind, tritt ein dreifacher Vortheil ein, den
ir bei anderen Normalgleichungen nicht immer haben.
ämlich a) wir haben lauter ganze Zahlen zu Coefficienten;
) die Summe der absoluten Glieder ist und bleibt im-
ner = 0, wenn wir den §. 56. angeführten Kunstgriff an-

wenden, und diesen Kunstgriff wird jeder unbedingt immer anwenden, der seinen Nutzen einmal einsehen gelernt hat. c) jede der gesuchten Gröfsen tritt in der ihr entsprechenden Gleichung nothwendig mit einem überwiegend grofser Coefficienten auf; wir können also in der Wahl derjenigen Gröfse, die den gröfsten Näherungs-Werth zu geben verspricht, fast nie zweifelhaft seyn. Es kommt also nur noch darauf an, dafs wir uns in der wirklichen Ausführung nichts Unnöthiges aufschreiben. Da habe ich nun, besonders bei gröfseren Eliminationen, mir immer erst die Normalgleichungen auf ein besonderes Papier geschrieben und mir dann für jeden Näherungs-Werth zwei Columnen gemacht, deren erste die Producte enthält, welche aus Multiplication des angenommenen Näherungs-Werthes und der betreffenden Coefficienten entstehen, und in deren zweiter die dadurch abgeänderten absoluten Werthe stehen.

Wir wollen nun dies noch an einem vollständigen Beispiele erklären, und schreiben uns also aus §. 56. 2) erst hier die Normalgleichungen her, indem wir nach unserer gewohnten Bezeichnung $dE_0 = x$; $dE_1 = a$; $dE_2 = b$; $dE_3 = c$ setzen. So sind also:

$$\begin{aligned} 0 &= +2{,}8 + 76x - 30a - 20b - 26c \\ 0 &= -4{,}1 - 30x + 83a - 25b - 28c \\ 0 &= -1{,}9 - 20x - 25a + 89b - 44c \\ 0 &= +3{,}2 - 26x - 28a - 44b + 98c \end{aligned}$$

Zuerst machen wir nun einen Ueberschlag, welcher Näherungs-Werth der gröfste werden wird. Dazu haben wir:

$$x = -\frac{2{,}8}{76} = -0{,}03\ldots \qquad b = +\frac{1{,}9}{89} = +0{,}02\ldots$$

$$a = +\frac{4{,}1}{83} = +0{,}04\ldots \qquad c = -\frac{3{,}2}{98} = -0{,}03\ldots$$

Demnach kommt a zuerst an die Reihe und wir haben also

für $a = +0{,}04$

Die Producte.	Die absoluten Glieder.
$-1{,}20$	$+1{,}60$
$+3{,}32$	$-0{,}78$
$-1{,}00$	$-2{,}90$
$-1{,}12$	$+2{,}08$
Probe durch Addition 0	0

Jetzt sehe ich gleich, dafs b vorgenommen werden mufs, weil $b = +\frac{2.90}{89} = 0{,}03\ldots$ der gröfste Näherungswerth wird. — Unsere Rechnung steht also vollständig so:

$a = +0{,}04$		$b = +0{,}03$		$a = +0{,}01$		$x = -0{,}01$		$c = -0{,}01$	
$-1{,}20$	$+1{,}60$	$-0{,}60$	$+1{,}00$	$-0{,}30$	$+0{,}70$	$-0{,}76$	$-0{,}06$	$+0{,}26$	$+0{,}20$
$+3{,}32$	$-0{,}78$	$-0{,}75$	$-1{,}53$	$+0{,}83$	$-0{,}70$	$+0{,}30$	$-0{,}40$	$+0{,}28$	$-0{,}12$
$-1{,}00$	$-2{,}90$	$+2{,}67$	$-0{,}23$	$-0{,}25$	$-0{,}48$	$+0{,}20$	$-0{,}28$	$+0{,}44$	$+0{,}16$
$-1{,}12$	$+2{,}08$	$-1{,}32$	$+0{,}76$	$-0{,}28$	$+0{,}48$	$+0{,}26$	$+0{,}74$	$-0{,}98$	$-0{,}24$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Hier sind wir fertig, da wir nun zunächst $x = -0{,}002$ setzen müfsten und wir nur bis auf 0,01 fortzugehen beschlossen hatten, auch aus diesem Grunde schon in den beiden letzten Annäherungen x und c etwas gröfser genommen hatten, weil wir was 0,006 und mehr beträgt für 0,01 rechnen mufsten. — Es versteht sich von selbst, dafs man bei ernstlicher Anwendung immer eine Decimale weiter gehen wird, als man am Ende beibehalten will, nur soll man nicht versäumen, nach der Addition der verschiedenen Näherungs-Werthe (die hier freilich nur einmal vorkommt: $x = +0{,}04 + 0{,}01 = +0{,}05$) die überflüssigen Decimalen vor weiterer Anwendung wieder wegzurunden (vergl. *Beiträge* S. 168).

2) Wenn wir die bedingten Aufgaben der practischen Geometrie (nach dem dritten Abschnitte) bearbeiten, so

fallen die drei im Vorigen angeführten Vortheile, wenigstens theilweise, weg und wir müssen also uns anderweit zu helfen suchen.

a) Die Coefficienten solcher Normalgleichungen, die blofs von Bedingungsgleichungen erster und zweiter Klasse herrühren, bleiben freilich ganze Zahlen, die Bedingungsgleichungen dritter Klasse aber bringen uns immer Coefficienten mit, die in Decimalen fortlaufen, und dieser Unbequemlichkeit läfst sich nicht abhelfen; sie ist aber, wenn wir nur wie vorher immer in ganzen Einheiten die Annäherung betreiben, gerade nicht sehr hinderlich.

b) Weit schlimmer ist der Umstand, dafs die scharfe Prüfung, die wir im Vorigen durch das Addiren der einzelnen Columnen hatten, hier wegfällt. Da helfe ich mir nun durch Aufstellung einer Hülfs-Gleichung, die ich dadurch bilde, dafs ich alle Normal-Gleichungen addire und der so gewonnenen neuen Gleichung lauter entgegengesetzte Zeichen gebe. Bei der jedesmaligen Substitution nehme ich nun die Hülfs-Gleichung mit (so oft wenigstens, als ich eine Prüfung machen will, die ich nicht gerade immer zu machen nöthig finde), alsdann mufs eben so wie oben die Summe $= 0$ seyn.

Weil nun aber die Coefficienten keine ganzen Zahlen mehr sind, so kann es begegnen, dafs die nothwendig abgerundeten Decimalen einen kleinen Unterschied herbeiführen; dieser wird dann, wenn die nachgesehene Rechnung sich richtig findet, an der Hülfs-Gleichung, gleichsam gewaltsam, geändert.

Dieses an einem Beispiele zu erläutern wollen wir die drei Normalgleichungen des §. 104. zu VI. nach dieser Methode vollständig bearbeiten, jedesmal die Hülfsgleichung

nitnehmen, und wo wir ihre Zahl hinten um eine Einheit ndern, einen Punkt dabei setzen.

Wir haben so:

Normalgleichungen
$$\begin{cases} 0 = +6{,}167 + 6{,}000\,\kappa_1 + 4{,}319\,\kappa_2 - 0{,}763\,\kappa_3 \\ 0 = +4{,}202 + 4{,}319\,\kappa_1 + 77{,}629\,\kappa_2 + 2{,}663\,\kappa_3 \\ 0 = -7{,}345 - 0{,}763\,\kappa_1 + 2{,}663\,\kappa_2 + 3{,}005\,\kappa_3 \end{cases}$$

Hülfsgleich. $0 = -3{,}024 - 9{,}556\,\kappa_1 - 84{,}611\,\kappa_2 - 4{,}905\,\kappa_3$

$\kappa_3 = +2$		$\kappa_1 = -0{,}6$		$\kappa_4 = +0{,}3$		$\kappa_1 = -0{,}1$		$\kappa_2 = -0{,}09$	
−1,526	+ 4,621	−3,600	+ 1,041	−0,229	+ 0,812	−0,600	+ 0,212	−0,389	−0,177
+5,326	+ 9,528	−2,581	+ 6,937	+0,799	+ 7,736	−0,432	+ 7,304	−6,987	+0,317
+6,010	− 1,335	+0,458	− 0,877	+0,902	+ 0,025	+0,076	+ 0,101	−0,240	−0,139
−9,810	−12,834	+5,733	· − 7,101	−1,472	− 8,573	+0,956	− 7,617	+7,616	· −0,001
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\kappa_3 = +0{,}04$		$\kappa_1 = +0{,}03$		$\kappa_3 = +0{,}01$		$\kappa_2 = -0{,}008$		$\kappa_1 = +0{,}01$	
−0,031	− 0,208	+0,180	− 0,028	−0,008	− 0,036	−0,034	−0,070	+0,060	−0,010
+0,107	+ 0,424	+0,130	+ 0,554	+0,027	+ 0,581	−0,621	−0,040	+0,043	+0,003
+0,120	− 0,019	−0,023	− 0,042	+0,030	− 0,012	−0,021	−0,033	−0,008	−0,041
−0,196	− 0,197	−0,287	− 0,484	−0,049	− 0,533	+0,676	· +0,143	−0,095	· +0,048
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\kappa_3 = +0{,}01$		$\kappa_1 = +0{,}003$		$\kappa_3 = +0{,}004$		$\kappa_2 = -0{,}0007$		$\kappa_1 = +0{,}001$	
−0,008	− 0,018	+0,018	0,000	−0,003	− 0,003	−0,003	−0,006	+0,006	0,000
+0,027	+ 0,030	+0,013	+ 0,043	+0,011	+ 0,054	−0,054	0,000	+0,004	+0,004
+0,030	− 0,011	−0,002	− 0,013	+0,012	− 0,001	−0,002	−0,003	−0,001	−0,004
−0,049	− 0,001	−0,029	− 0,030	−0,020	− 0,050	+0,059	+0,009	−0,009	· 0,000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\kappa_3 = +0{,}001$		$\kappa_2 = -0{,}0001$	
−0,001	− 0,001	−0,000	− 0,001
+0,003	+ 0,007	−0,008	− 0,001
+0,003	− 0,001	−0,000	− 0,001
−0,005	− 0,005	+0,008	+ 0,003
0	0	0	0

Hier brechen wir die Elimination ab, weil die absoluten Glieder (unsere w, auf deren Wegschaffung es uns hier allein ankommt) bis auf die letzte Decimale verschwunden sind; und stellen zusammen:

$$\kappa_1 = -0{,}6 + 0{,}03 - 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}003 + 0{,}001$$
$$\kappa_1 = -0{,}656$$

$$\kappa_2 = -0{,}09 - 0{,}008 - 0{,}0007 - 0{,}0001$$
$$\kappa_2 = -0{,}0988$$

$$\kappa_3 = +2 + 0{,}3 + 0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}004 + 0{,}001$$
$$\kappa_3 = +2{,}365$$

welches die oben angegebenen Correlaten sind. Wie gering der Grad von Anstrengung und Aufmerksamkeit ist, den man bei dieser Rechnungs-Weise gebraucht, leuchtet von selbst ein.

3) Der Umstand, dafs der Coefficient der jedesmal näherungsweise zu bestimmenden Correlate (im Gegensatze gegen 1) c) hier nicht überwiegend grofs gegen die übrigen Coefficienten der betreffenden Normalgleichung ist, kann die höchst verdriefsliche Folge haben, dafs die Convergenz zu stehenden Resultaten äufserst gering wird, so dafs die Correction, die man auf die obige Weise z. B. für die Correlate κ_p anbringt, beinahe alles wieder verdirbt, was man bis jetzt für andere Correlaten z. B. κ_q und κ_r gut gemacht hat. — Gegen diesen grofsen Uebelstand ein durchgreifendes Hülfsmittel aufzufinden, hat mir bis jetzt nicht gelingen wollen, obwohl ich vermuthen mufs, dafs es deren giebt. — Einstweilen habe ich gelegentlich meiner grofsen Eliminations-Arbeit ein Palliativ-Mittel angewandt, was mir damals durchgeholfen hat und auch später mit Nutzen von mir gebraucht worden ist. Dieses will ich also hier noch mittheilen.

Wenn ich mit der indirecten Elimination nach dem Vorigen eine zeitlang fortgefahren habe, so lerne ich sehr bald diejenigen κ kennen, die einander so entgegenwirken, dafs die Annäherung bei ihnen beinahe stille steht. Diese bilden nun für sich gleichsam eine Familie, die auf einmal bearbeitet seyn will. Ich hatte so z. B. bei der grofsen Elimination etwa 5 oder 6 solche Familien von je 2, 3 oder 4 Gliedern; wir wollen hier aber beispielsweise den Fall setzen, es sey nur eine solche Familie von 3 Gliedern κ_p; κ_q; κ_r vorhanden. — Da schreibe ich mir nun die betreffenden Normal-Gleichungen aus den übrigen heraus, indem ich alle anderen κ als $= 0$ betrachte, also:

$$0 = w_p + a_1 \kappa_p + a_2 \kappa_q + a_3 \kappa_r$$
$$0 = w_q + a_4 \kappa_p + a_5 \kappa_q + a_6 \kappa_r$$
$$0 = w_r + a_7 \kappa_p + a_8 \kappa_q + a_9 \kappa_r$$

wo die a lauter bekannte in den Normalgleichungen vorkommende Zahlen-Coefficienten bedeuten (und nicht mit den obigen a zu verwechseln sind), die w aber bei den successiven Annäherungen immer andere und andere Werthe erhalten. — Die w lasse ich nun in Buchstaben stehen und mache mir sodann durch gewöhnliche directe Elimination in einer besonderen Rechnung drei andere Gleichungen:

$$\kappa_p = \alpha_1 w_p + \alpha_2 w_q + \alpha_3 w_r$$
$$\kappa_q = \alpha_4 w_p + \alpha_5 w_q + \alpha_6 w_r$$
$$\kappa_r = \alpha_7 w_p + \alpha_8 w_q + \alpha_9 w_r$$

worin also die α bestimmte, nur von den obigen a abhängige, Zahlen-Werthe sind. Diese Familiengleichungen schreibe ich mir nun auch auf ein besonderes Papier. — Komme ich nun im Laufe der Arbeit auf einen Punkt, wo die w_p; w_q; w_r vor allem zu verkleinern sind, so substituire ich ihre jedesmaligen Zahlen-Werthe in die betreffenden Familiengleichungen, und finde so auf einmal die drei Werthe von κ_p; κ_q; κ_r. Die vollständige Substitution dieser 3 Werthe giebt dann die drei betreffenden w sehr nahe $= 0$ und zeigt, ob nun wie gewöhnlich fortgefahren werden kann, oder ob vielleicht eine zweite Familie auch erst so vorgenommen werden muſs.

Wie schon gesagt, ich halte dieses Hülfsmittel für nichts weniger als definitiv. Indessen hat es mir in Ermangelung eines besseren bis jetzt doch sehr nützliche Dienste geleistet, und da muſste ich es denn zum Gebrauche meiner Leser, denen ähnliche Vorfälle etwa begegnen sollten, auch einstweilen geben, wie es eben ist.

§. 112.

Wir wollen nun auch hier noch einige für die Praxis wichtige Bemerkungen beifügen.

1) Mit dem Eliminiren, und zwar sowohl mit dem directen als mit dem indirecten, läfst sich bei Bearbeitung bedingter Beobachtungen nun noch ein indirectes Verfahren anderer Art in Verbindung bringen, welches auf der sogenannten unvollständigen Ausgleichung (*compensatio imperfecta s. manca*) beruht. Mit diesem Namen belegt nämlich *Gaufs* eine Ausgleichung, die nicht allen vorgegebenen Bedingungsgleichungen Genüge leistet, sondern nur einigen derselben.

a) Um dies Verfahren zu verstehen, mufs man zuerst folgenden Lehrsatz kennen: Wenn man unvollständig ausgeglichene Beobachtungen mit Hinzuziehung aller Bedingungsgleichungen aufs Neue ausgleicht, als ob sie unmittelbare Beobachtungen wären; so kommt man zu denselben Werthen, welche man auch erhalten hätte, wenn man gleich vom Anfange die unmittelbaren Beobachtungen mit Zuziehung aller Bedingungsgleichungen vollständig ausgeglichen hätte.

Den Beweis können wir unmittelbar an unsere Formeln n. 43; 44 und 45 anknüpfen, (wenn wir nur, wie oben, vorbehalten bei Beobachtungen verschiedener Genauigkeit noch die p gehörig einzuführen). Wir wollen zu dem Ende voraussetzen, es seyen t Beobachtungen vorgegeben, die durch r Bedingungen verknüpft wären, und zur Abkürzung des Schreibens spätere Coefficienten blofs durch dicke Punkte andeuten. So hätten wir nun für die vollständige Ausgleichung zuerst r Bedingungsgleichungen mit t Gliedern aufzustellen:

$$
\begin{aligned}
0 &= w_1 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_t v_t \\
0 &= w_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_t v_t \\
&\vdots \\
\text{n. 43.}\quad 0 &= w_p + \cdot\, v_1 + \cdot\, v_2 + \ldots + \cdot\, v_t \\
0 &= w_{p+1} + \cdot\, v_1 + \cdot\, v_2 + \ldots + \cdot\, v_t \\
&\vdots \\
0 &= w_r + \cdot\, v_1 + \cdot\, v_2 + \ldots + \cdot\, v_t
\end{aligned}
$$

Hieraus leiten wir nun t Correlatengleichungen ab, jede mit r Gliedern:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1\kappa_1 + b_1\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r \\
\text{. 44.}\quad v_2 &= a_2\kappa_1 + b_2\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r \\
&\vdots \\
v_t &= \cdot\,\kappa_1 + \cdot\,\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r
\end{aligned}
$$

Dies giebt uns nun, durch Substitution in die Bedingungsgleichungen, r Normalgleichungen jede mit r Gliedern:

$$
\begin{aligned}
0 &= w_1 + [aa]\kappa_1 + [ab]\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r \\
0 &= w_2 + [ab]\kappa_1 + [bb]\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r \\
&\vdots \\
\text{. 45.}\quad 0 &= w_p + \cdot\,\kappa_1 + \cdot\,\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r \\
0 &= w_{p+1} + \cdot\,\kappa_1 + \cdot\,\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r \\
&\vdots \\
0 &= w_r + \cdot\,\kappa_1 + \cdot\,\kappa_2 + \ldots + \cdot\,\kappa_p + \cdot\,\kappa_{p+1} + \ldots + \cdot\,\kappa_r
\end{aligned}
$$

Hieraus müfsten wir also eliminiren u. s. w., wenn wir, wie bisher, vollständig ausgleichen wollten.

Wollen wir nun aber, nach unserer Voraussetzung, erst eine unvollständige Ausgleichung bewirken, für die ersten p Bedingungsgleichungen, so setzen wir erst diese p Gleichungen, jede mit t Gliedern, allein an, bilden daraus auch t Correlaten-Gleichungen, jede mit p Gliedern, und erhalten so am Ende p Normalgleichungen, jede mit p Gliedern. Suchen wir sodann die κ aus diesen letzten durch Elimination, so erhalten wir andere Werthe, als welche wir bei vollständiger Ausgleichung erhalten müfsten; wir wollen

sie mit ${}^pK$ bezeichnen. Unmittelbar bekommen wir also durch die Elimination:

$${}^pK_1;\ {}^pK_2;\ \ldots\ {}^pK_p;$$

zugleich ersehen wir aber im Rückblicke auf das Obige, daß wir durch Nicht-Berücksichtigung der $r-p$ letzten Bedingungsgleichungen eigentlich nun:

$${}^pK_{p+1} = {}^pK_{p+2} = \ldots = {}^pK_r = 0$$

gesetzt haben.

Die Substitution der eben jetzt gefundenen ${}^pK$ in die n. 44 giebt uns nun auch Werthe von v, die von denen aus den sämmtlichen richtigen K zu berechnenden abweichen; wir wollen sie mit ${}^pv_1;\ {}^pv_2;\ \ldots\ {}^pv_t$ bezeichnen, und haben also:

n. 44.*
$$\begin{aligned} {}^pv_1 &= a_1{}^pK_1 + b_1{}^pK_2 + \ldots + \cdot\,{}^pK_p + \cdot 0 + \cdot 0 \ldots \\ {}^pv_2 &= a_2{}^pK_1 + b_2{}^pK_2 + \ldots + \cdot\,{}^pK_p + \cdot 0 + \cdot 0 \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Anbringung dieser ${}^pv$ an die ursprünglichen reinen Beobachtungen giebt uns die unvollständig ausgeglichenen Beobachtungen. Wollen wir diese erst mit den wirklichen Beobachtungen und den für sie zu substituirenden vollständig ausgeglichenen vergleichen, so müssen wir nun weiter entweder auf den §. 58. zurückgehen und die $o + {}^pv$ in die ursprünglichen endlichen Bedingungen (9) substituiren, oder was nach allem Obigen ganz gleichbedeutend und bei weitem einfacher ist, unsere ${}^pv$ an die Stelle der v in n. 43 substituiren. Dadurch erhalten wir nun auf der linken Seite nicht 0, sondern statt dessen noch neue Widersprüche, die wir mit ${}^pw$ bezeichnen wollen, und es bestehen für diese die Gleichungen:

n. 43.*
$$\begin{aligned} 0 &= w_1 - {}^pw_1 + a_1{}^pv_1 + a_2{}^pv_2 + \ldots a_t{}^pv_t \\ 0 &= w_2 - {}^pw_2 + b_1{}^pv_1 + b_2{}^pv_2 + \ldots b_t{}^pv_t \end{aligned}$$

u. s. w.

ollen nun aber, nach unserer Voraussetzung, diese zurück-
ebliebenen ^{p}w durch vollständige Ausgleichung fortge-
chafft werden, als ob sie aus unmittelbaren Beobachtungen
ntnommen wären, so müssen an die unvollständig ausge-
lichenen Beobachtungen noch neue Verbesserungen ange-
racht werden, welche wir ^{q}v nennen wollen. Für diese
ätten wir unsere Arbeit wieder von vorn anzufangen, also
uerst die r Bedingungsgleichungen zu bilden:

n. 43.** $$\begin{aligned} 0 &= {}^{p}w_1 + a_1{}^{q}v_1 + a_2{}^{q}v_2 + \ldots\ldots + a_t{}^{q}v_t \\ 0 &= {}^{p}w_2 + b_1{}^{q}v_1 + b_2{}^{q}v_2 + \ldots\ldots + b_t{}^{q}v_t \end{aligned}$$

u. s. w.

)afür müssen wir nun r Correlaten suchen, die ^{q}K heifsen
nögen, weil sie nothwendig verschieden von den r Correla-
en sind, welche wir gefunden haben würden, wenn wir
leich vom Anfange vollständig ausgeglichen hätten. Un-
ere Correlaten-Gleichungen sind also jetzt:

n. 44.** $$\begin{aligned} {}^{q}v_1 &= a_1{}^{q}K_1 + b_1{}^{q}K_2 + \ldots\ldots \cdot {}^{q}K_r \\ {}^{q}v_2 &= a_2{}^{q}K_1 + b_2{}^{q}K_2 + \ldots\ldots \cdot {}^{q}K_r \end{aligned}$$

u. s. w.

)ie Substitution dieser Correlatengleichungen in die Bedin-
ungsgleichungen n. 43** giebt uns also die r Normalglei-
hungen:

n. 45.** $$\begin{aligned} 0 &= {}^{p}w_1 + [aa]{}^{q}K_1 + [ab]{}^{q}K_2 + \ldots\ldots \cdot {}^{q}K_r \\ 0 &= {}^{p}w_2 + [ab]{}^{q}K_1 + [bb]{}^{q}K_2 + \ldots\ldots \cdot {}^{q}K_r \\ 0 &= {}^{p}w_3 + [ac]{}^{q}K_1 + [bc]{}^{q}K_2 + \ldots\ldots \cdot {}^{q}K_r \end{aligned}$$

u. s. w.

Hieraus sind also die ^{q}K durch Elimination und dann
lie ^{q}v durch Substitution in n. 44** zu finden, und somit
väre unsere **Voraussetzung** erfüllt.

Wir haben nun behauptet, dafs dies vorausgesetzte Ver-
'ahren uns dieselben Werthe gebe, welche wir durch voll-

ständige Ausgleichung vom Anfange hätten finden können. Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet sofort jetzt ein. Substituiren wir nämlich in unsere n. 43* die Werthe für die ${}^{p}v$, die wir durch n. 44* gefunden hatten, und die Werthe für die ${}^{p}w$, welche sich aus n. 45** ergeben, so kommt uns

$$0 = w_1 + [aa]({}^{p}K_1 + {}^{q}K_1) + [ab]({}^{p}K_2 + {}^{q}K_2) + \ldots + \cdot\,({}^{p}K_r + {}^{q}K_r)$$
$$0 = w_2 + [ab]({}^{p}K_1 + {}^{q}K_1) + [bb]({}^{p}K_2 + {}^{q}K_2) + \ldots + \cdot\,({}^{p}K_r + {}^{q}K_r)$$

u. s. w.

welches, mit der ursprünglichen n. 45. verglichen, zeigt, dafs:

$$K_1 = {}^{p}K_1 + {}^{q}K_1;\quad K_2 = {}^{p}K_2 + {}^{q}K_2;\quad K_3 = {}^{p}K_3 + {}^{q}K_3 \text{ u. s. w.}$$

Vergleichen wir nun endlich noch die Correlatengleichungen n. 44; n. 44* und n. 44**; so erhellt, dafs

$$v_1 = {}^{p}v_1 + {}^{q}v_1;\quad v_2 = {}^{p}v_2 + {}^{q}v_2;\quad v_3 = {}^{p}v_3 + {}^{q}v_3 \text{ u. s. w.}$$

so dafs also dieselben Correctionen nach und nach angebracht sind, welche wir bei gleich vom Anfange gemachter vollständiger Ausgleichung auf einmal erhalten hätten. W. Z. E. W.

b) Dieser Lehrsatz könnte uns zunächst ein Mittel zur Zeit-Ersparnifs gewähren, wenn wir etwa im Laufe einer weitschichtigen Arbeit eine Anzahl von Beobachtungen schon durch alle ihre Bedingungsgleichungen ausgeglichen hätten, und nun anderweit hinzukommende Beobachtungen, die ursprünglich nicht in unserem Plane lagen, eine oder einige neue Bedingungsgleichungen mit sich gebracht hätten. In solchem Falle brauchten wir also die Ausgleichungs-Arbeit nicht ganz neu zu machen oder die neu hinzukommenden Beobachtungen unbenutzt zu lassen, sondern wir könnten die schon unvollständig ausgeglichenen Beobachtungen nun vollständig wieder ausgleichen, und das würde verhältnifsmäfsig rasch gehen, weil die neu hinzukommenden ${}^{q}v$

edenfalls sehr klein ausfallen müfsten, wenn der neu hinzu-ommenden Beobachtungen nur wenige waren.

Eben so könnten wir diesen Lehrsatz anwenden, um inen Fehler zu verbessern, der uns etwa in Abzählung der ledingungsgleichungen begegnet wäre, indem wir etwa eine der die andere vergessen hätten. (Nur falsche dürften wir uch in diesem Falle nicht aufgestellt haben). — Wäre ns also z. B. das System **Fig. 21.** §. 92. c. zur Ausglei-hung vorgekommen, ehe wir uns den Inhalt des zwölften apitels namentlich des §. 99. wohl zu eigen gemacht hät-en, so hätten wir vielleicht die siebente Bedingungsglei-hung, die durch n. 58 nicht angezeigt war, übersehen kön-en. Davon wäre dann die Folge gewesen, dafs am Ende nserer Arbeit die Dreiecks-Rechnung nicht gestimmt hätte. Wären wir nun durch Nachrechnen, Neu-Ueberlegen und llen den Verdrufs, der in solchen Fällen vorkommt, dar-uf aufmerksam geworden, dafs diese Gleichung auch noch u erfüllen bliebe; so hätten wir, vermöge unseres Lehr-atzes die bisherigen Correctionen als ^{p}v betrachten und da-u nun noch die ^{q}v suchen müssen, um wenigstens rascher um Ziele zu kommen, als es durch gänzliches Neu-Ma-hen der ganzen Arbeit hätte geschehen können.

c) Die wichtigste Anwendung, die auch Gaufs selbst on diesem seinem Lehrsatze macht, besteht aber in der uccessiven Elimination, die er darauf gründet. Wenn ämlich eine grofse Menge von Bedingungsgleichungen zu rfüllen ist, so kann die Eliminations-Arbeit dadurch ins Unerträgliche anwachsen. — Theilt man dann aber die Be-lingungsgleichungen in zwei Abtheilungen, und sucht erst ine erste unvollständige Ausgleichung blofs für die erste Abtheilung, substituirt und sucht dann eine zweite un-ollständige Ausgleichung blofs für die zweite Abtheilung,

substituirt wieder und sucht die dritte unvollständige Ausgleichung blofs wieder für die erste Abtheilung u. s. w. d. h. wendet man den obigen Lehrsatz immer wiederholt zwischen den beiden Abtheilungen an; so werden die gefundenen Verbesserungen allmälig immer kleiner und kleiner, bis sie am Ende für 0 genommen werden können. — Offenbar werden nämlich hierbei die obigen ^{q}v nur in mehrere Theile getheilt.

Ich habe nur die eine (*Beiträge* S. 168 mitgetheilte) Erfahrung im Grofsen von dieser successiven Elimination gemacht und die Arbeit doch immer noch sehr weitläuftig und beschwerlich gefunden, wahrscheinlich aber vorzüglich darum, weil ich die dabei anzuwendenden Vortheile und Kunstgriffe nicht kannte, in deren Besitz meines Wissens bis jetzt *Gaufs* allein noch ist, und die nach dem, was ich von seinen Ausgleichungs-Arbeiten gelegentlich erfahren habe, sehr erheblich seyn müssen. — Deshalb kann ich meinen Lesern nur von Herzen wünschen, dafs, ehe sie in den Fall kommen, Eliminations-Arbeiten von ähnlicher Ausdehnung vornehmen zu müssen, diese Hülfsmittel vollständig veröffentlicht seyn mögen.

2) Einen von diesen Kunstgriffen lehrte mich *Gaufs*, nachdem meine *Beiträge* (2tes Heft) gedruckt waren. Er beruht auf einem schon an und für sich interessanten Lehrsatze, den ich mir bei dieser Gelegenheit entwickelt habe und den wir also hier vorerst vornehmen wollen.

Lehrsatz: Wenn zum Behufe der Ausgleichung eine gewöhnliche Bedingungsgleichung zu erfüllen ist, aufserdem aber noch eine Anzahl anderer Bedingungsgleichungen erfüllt werden (bleiben) sollen, deren absolutes Glied $= 0$ ist; so kann man diesen Zweck durch Erfüllung einer neuen Bedingungsgleichung erreichen, welche man da-

durch bildet, dafs man die sämmtlichen vorgegebenen Gleichungen addirt, nachdem man die letzterwähnten erst mit Zahlen-Coefficienten multiplicirt hat, welche so bestimmt sind, dafs die Summe der Quadrate der Coefficienten in der neuen Gleichung ein Minimum wird.

Beweis. Seyen gegeben die Bedingungsgleichungen:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 0 &= w_1 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots \\ 0 &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots \\ 0 &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots \\ 0 &= d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + \dots \end{aligned}$$

wo nur beispielsweise gerade drei Gleichungen ohne absolute Glieder angenommen sind.

Seyen sodann die letzten drei Gleichungen der Reihe nach mit x; y; z multiplicirt und sodann alle vier addirt, so erhalten wir eine neue Gleichung, die wir

$$\text{II.}\quad 0 = w_1 + C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 + \dots$$

schreiben können, wenn wir unter den C die Ausdrücke verstehen:

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} C_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z \\ C_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z \\ C_3 &= a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z \end{aligned}$$

u. s. w.

Ich sage nun: Wenn x; y; z so bestimmt sind, dafs $[CC]$ ein Minimum wird, so mufs die Ausgleichung, welche die eine Gleichung II. erfüllt, zugleich alle vier Gleichungen I. erfüllen.

Um nun zuerst also x; y; z bedingungsgemäfs zu bestimmen, mufs $\left(\frac{\mathrm{d}[CC]}{\mathrm{d}x}\right) = 0$; $\left(\frac{\mathrm{d}[CC]}{\mathrm{d}y}\right) = 0$; $\left(\frac{\mathrm{d}[CC]}{\mathrm{d}z}\right) = 0$ gemacht werden, d. h. es sind die Gleichungen zu erfüllen:

$$\text{IV.} \quad \begin{aligned} [bC] &= [ab] + [bb]x + [bc]y + [bd]z = 0 \\ [cC] &= [ac] + [bc]x + [cc]y + [cd]z = 0 \\ [dC] &= [ad] + [bd]x + [cd]y + [dd]z = 0 \end{aligned}$$

woraus sich also die Zahlen-Werthe von x; y; z durch Elimination ergeben und also durch Substitution in III. auch die Zahlen-Werthe für die einzelnen C.

Die Erfüllung der einen Bedingungsgleichung II. erfordert aber die Bildung der Correlatengleichungen:

$$\text{V.} \quad \begin{aligned} v_1 &= C_1 K_1 \\ v_2 &= C_2 K_1 \\ v_3 &= C_3 K_1 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Durch deren Substitution in II. kommt die Normalgleichung:

$$\text{VI.} \quad 0 = w_1 + [CC] K_1$$

$$\text{oder} \quad K_1 = -\frac{w_1}{[CC]}$$

Dieser Werth von K in V. substituirt giebt dann die Zahlen-Werthe der einzelnen v, welche die Gleichung II. erfüllen, nämlich:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{w_1}{[CC]} C_1 \\ v_2 &= -\frac{w_1}{[CC]} C_2 \\ v_3 &= -\frac{w_1}{[CC]} C_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Substituiren wir aber dieselben Zahlen-Werthe in die vier Gleichungen I., so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1 - \frac{w_1}{[CC]} [aC] \\ 0 &= -\frac{w_1}{[CC]} [bC] \\ 0 &= -\frac{w_1}{[CC]} [cC] \\ 0 &= -\frac{w_1}{[CC]} [dC] \end{aligned}$$

Die Factoren $[bC]$; $[cC]$; $[dC]$ sind nun schon vermöge

ler Gleichungen IV. zu 0 geworden und somit sind die drei etzten Bedingungsgleichungen in I. erfüllt. Der Factor $aC]$ der ersten Gleichung läfst sich aber leicht als $[CC]$ erkennen. Denn multipliciren wir die Gleichungen III. der Reihe nach mit den betreffenden C und addiren, so kommt uns:

$$[CC] = [aC] + [bC]x + [cC]y + [dC]z$$

worin die drei letzten Glieder wieder vermöge der Gleichungen IV. verschwinden.

Demnach geht nun auch die erste Gleichung von I. über in:

$$0 = w_{\text{I}} - w_{\text{I}}$$

und sind also alle Gleichungen I. erfüllt. W. Z. E. W.

Vermittelst dieses Lehrsatzes bekommt man es also in seine Gewalt, bei der successiven Elimination die Bedingungsgleichungen der zweiten Abtheilung so umzuarbeiten, dafs denen der ersten Abtheilung, welche durch die frühere Rechnung schon erfüllt sind, nach wie vor Genüge geschieht.

Hätten wir also z. B. ein durch zwei Diagonalen durchschnittenes Viereck wie **Fig. 9.** zu bearbeiten, in welchem alle Winkel gemessen wären, so hätten wir darin nach den oben vorgetragenen Lehren drei Bedingungsgleichungen zweiter Klasse und eine dritter Klasse. Nähmen wir nun erst die drei Bedingungsgleichungen zweiter Klasse allein vor und bestimmten uns dadurch die ${}^{p}v$, so verschwänden die absoluten Glieder in diesen Gleichungen nach Substitution der ${}^{p}v$. Bearbeiten wir sodann die eine Bedingungsgleichung dritter Klasse für die ${}^{q}v$ erst, nachdem wir sie zuvor, vermöge unseres Lehrsatzes, so umgestaltet haben, dafs die ${}^{q}v$ nicht mehr jene Erfüllung der Bedingungsgleichungen zweiter Klasse stören können; so ist nun durch die

$^{p}v+^{q}v$ eine vollständige Ausgleichung für dieses Viereck gewonnen.

Wenn nun ein solches Viereck aber mit anderweiten Figuren, z. B. einfachen Dreiecksketten in Verbindung steht, so tritt ein doppelter Fall ein. Haben wir nämlich Winkel-Verbesserungen zu suchen gehabt, so kann die erst weggelassene, hernach auf obige Weise eingeführte, Bedingungsgleichung dritter Klasse die benachbarten Dreiecke gar nicht afficiren, und wir sind also nun ganz fertig. — Haben wir aber Richtungs-Verbesserungen gesucht, so wird unser dermaliges Verfahren zwar diejenigen Bedingungsgleichungen zweiter Klasse, die in dem Vierecke selbst enthalten sind, erfüllen, dagegen aber die in den angränzenden Dreiecken noch stören. Wir werden also zwar noch weiter successiv zu elimiriren haben, aber jedenfalls eine bedeutend raschere Convergenz zu stehenden Resultaten erhalten.

Ich habe, wie gesagt, über die Anwendung dieses Kunstgriffes keine ernstliche Erfahrung gemacht, sondern mir nur, nachdem ich ihn kennen gelernt, ein Rechnungs-Beispiel dazu gemacht, welches hier mitzutheilen überflüssig seyn würde, da jeder meiner Leser nach allem Vorhergehenden sich dergleichen selbst machen kann. Da aber *Gauſs* bei seinen groſsen Ausgleichungs-Arbeiten, wo mehrfach Vierecke zwischen Dreiecksketten vorkommen, unter anderen mit Hülfe desselben eine überaus schnelle Convergenz in der successiven Elimination erhalten hat und sich überzeugt erklärt, daſs selbst bei so verschränkten Systemen wie das meinige (*Beiträge Taf. III.*) eine sehr bedeutend schnellere Ausgleichung dadurch gewonnen seyn würde, so muſs ich ihn der Aufmerksamkeit der Practiker besonders empfehlen.

Register.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Abbildung der *corr. Δ*. 196.
Abweichung, mittlere 37. 60. 131.
Abzählung der Bedingungsgleichungen 1. Klasse 269. 322.
2. - 271. 322.
3. - 277. 311. 325.
Aenderung der Beobachtungen 7.
- von Gewichts-Zahlen 67. 151.
Aeufsere Prüfung 302.
Algebraische Summe 75.
Amöneburg 113.
Anlegen der Maafsstäbe 89.
Ansatz der Bedingungsgleichungen bedingter Beobachtungen 180. 246. 258.
Ansatz für die ungewöhnlichen Fälle 293.
Anzahl der Bedingungen 179. 249.
Arithmetisches Mittel 34.
- folgt aus dem Princip 15.
- führt auf das Princip 36.
- im allgemeineren Sinn 57.
Aufgabe der Ausgleichungs-Rechnung 9.
Aufgaben eingetheilt 25.
Aufstellung des Theodolithen 52. 168. 205.
Aufsuchung und Darstellung der Bedingungsgleichungen 248. 253.
Aufsuchung für die
1. Klasse 269. 330.
2. - 274. 330.
3. - 281. 312. 330.
Ausgeglichene Beobachtungen 8.
Ausschliefsen nach dem Erfolg 67.
Azimuthal-Unterschiede 158.
Azimuthe, vorläufige 159.
- abgeschlossene 162. 165. 206.
- ausgeglichene 208.
- definitive 209.
Azimuth-Uebertragung 330.

Basis-Messung 77.
Bedingte Beobachtungen 26. 171.
Bedingtes Minimum 29. 175.
Bedingungen 29. 172.
Bedingungsgleichungen vermittelnder Beobachtungen 108.
Bedingungsgleichungen bedingter Beobachtungen 174.
1. Klasse 184. 269. 322.
2. - 187. 269. 322.
3. - 198. 276. 311. 322.
Beiderseits beobachtete Richtungen 270.
Beleuchtung 51.
Berechnung von [*vv*] 48. 181. 385.
Berechtigung zum Princip 23.
Berg-Werk 86.
Berührung der Maafsstäbe 89.
Beschaffenheit der Beobachtungen 20.
Bestimmte Anzahl der Bedingungen 249.
Bezeichnungen bei Polygonmessungen 332.

Central-Systeme 282. 286. 312.
Centrirung 52. 91. 113.
Centrirungs-Elemente 118. 123. 147.
Chronometer 74.

Coefficienten-Berechnung 92. 107. 173. 258.
Coefficienten-Verhältnisse 262.
Compafsstriche 330. 357.
Constante Fehler 1.
Construction der Instrumente 53.
Control-Messungen 4. 268.
corr. A. 126. 196.
corr. H. 126. 163. 167.
Correlaten 176.
- Gleichungen 177. 216.

Darstellung von Gewicht-Steinen 84.
Darstellung der Bedingungen 179. 248. 255.
Darstellung für Central-Systeme 286.
Decimalstellen 222. 356.
Definitive Azimuthe 209.
- Elemente 104.
Differential-Rechnung 12.
Directe Beobachtungen 26. 33.
Directes Eliminiren 376.
Dreieckspunkte bei Polygonmessungen 369.
Dreistrahlige Punkte 283. 295. 313.
Dünsberg 308.

Einschaltung aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung 45.
Einschaltung von Punkten 303.
- von Linien 306.
- - Dreiecks-Systemen 306.
- - polygonometrischen Zügen 371.
Einseitige Richtungen 270. 276.
Elemente 26. 102.
- vorläufige 104.
- definitive 104.
- wahre 104.
Elimination 110. 112. 178.
- directe 376.
- indirecte 165. 386
Eliminations-Coefficienten 136.
- Procefs (Gaufsischer) 111. 376.
Empfindliche Theile 258.
Erfolg 67.
Erneuerung der Orientirung 369. 372.
Excentricität des Compasses 357.
- des Theodolithen 118.

Fälle der Anwendung 25.
Familien-Gleichungen 393.
Fehler, grobe 1.
- mittlere 20. 38.
- regelmäfsige 1.
- unregelmäfsige 2.
- unvermeidliche 2.
- wahrscheinliche 45.
- zufällige 2.
- bei Winkelmessungen 51.
- Procent 44. 231. 320.
Feldberg 75.
Feldflur 301.
Fingirte Beobachtungen 39. 60. 131. 153.
Form der Verbesserungen 7.
Fragen beim Ansatz bedingter Beobachtungen 248.
Frauenberg 75. 308.
Fremde Punkte 270. 278. 324.
Functionen directer Beobachtungen 69. 91.
Functionen bedingter Beobachtungen 223.
Functionen der Elemente 144.

Gattung der Beobachtungen 20.
- der Fehler 1.
Gefälle 80. 375.
Gehülfen 170. 318.
Genauigkeit directer Beobachtungen 42. 59.
Genauigkeit vermittelnder Beobachtungen 130. 152.
Genauigkeit bedingter Beobachtungen 182. 216.
Genauigkeit der Elemente 133. 154.
Genauigkeit der Functionen bei directen Beobachtungen 69. 92.
Genauigkeit der Functionen bei vermittelnden Beobachtungen 144.
Genauigkeit der Functionen bei bedingten Beobachtungen 223.
General-Protocolle 170.
Geographische Längen-Unterschiede 74.
Geschäfte 111. 140. 178. 228.
Gesetz der Wahrscheinlichkeit 23.
- der Abhängigkeit 103.
Gewicht der Winkel und Richtungen 169.
Gewichte der Beobachtungen 54.
- der Elemente 133. 383.
Gewichts-Einheit 54. 98.
- Gleichungen 137.
Gewichtsteine 84.
Gewöhnlichste Fälle 285.
Gleiche Theile 78.
Gleichgewicht der Beobachtungen 18.

Gleichnifs vom Schwerpunkt 17. 55. 60.
Göttingen 75.
Gränzen der Zuverlässigkeit 46.
Gruben-Compafs 373.
Gute Beobachtungen 10.

Halbirungen 83.
Hauptgeschäfte bei vermittelnden Beobachtungen 111.
Hauptgeschäfte bei bedingten Beobachtungen 178.
Hauptpunkt des Central-Systemes 282.
Heliotrop-Beobachtungen 51.
- Signale 75.
Heterogene Beobachtungsgröfsen 20. 97.
Historisch angeführte Sätze 45. 378. 383.
Hodometer 371.
Horizont-Abschlufs 27.
Horizont-Abschlufs ohne Kunstgriff 157.
Horizont-Abschlufs mit Kunstgriff 163. 387.
Hülfs-Gleichung 390.
Hypothese über das Wahrscheinlichkeitsgesetz 23.
Hypothesen zu Auffindung von Coefficienten-Verhältnissen 299. 314.

Indirectes Eliminiren 165. 386.
Indirectes Verfahren 104.
Instructionen 44. 318. 369.
Isolirte Punkte 279. 323.

Kataster-Geometer 371.
Ketten-Messung 44. 87. 311. 319.
Kilogramm 83.
Kirchthurm 202. 302.
Klassen der Bedingungsgleichungen 184. 187. 198. 268.
Knill 197.
Können und Wollen 125.
Kunstgriffe 48. 163.

Land-Messer 44.
Längen-Unterschiede 75.
Lateral-Refractionen 3. 197.
Lehrsätze 42. 76. 214. 227. 261. 271. 277. 311. 325. 334. 394. 400.
Linear-Messung 44. 310. 318.
Lineare Functionen 85.
- Gleichungen 104.
Literarische Notizen 24. 32. 113. 124. 157. 385.
Local-Triangulirungen 88. 318.
Logarithmen-Tafeln 223.
Logarithmische Differenzen 96. 199. 259.
Logik 7.

Maafs der Genauigkeit 43.
Maafsstab-Correctionen 89.
Maafsstäbe 22. 77. 89.
Mannheim 75. 77.
Marburg 308.
Markscheiderzüge 80. 373.
Meisner 75.
Meridian 357.
Mefskette 44. 87.
Methoden (drei) des Ansatzes bei bedingten Beobachtungen 258.
Micrometer 315.
Microscopisches Centriren 91.
Minimum 12.
Mittelweg 257.
Mittlere Abweichung der Beobachtungen 37.
Mittlere Abweichung der Gewichts-Einheit 60.
Mittlerer Fehler 20. 38.
Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels 41.
Mittlerer Fehler der Gewichts-Einheit 60.
Mittlerer Fehler directer Beobachtungen 39. 62.
Mittlerer Fehler vermittelnder Beobachtungen 132. 153.
Mittlerer Fehler bedingter Beobachtungen 182 217.
Mittlerer Fehler bei Theodolithen-Messungen 47. 51. 167.
Mittlerer Fehler bei Linien-Messungen 22. 44. 88. 319.
Multiplication von beobachteten Gröfsen 81.

Nachträgliche Geschäfte bei vermittelnden Beobachtungen 140.
Nachträgliche Geschäfte bei bedingten Beobachtungen 228.
Neben-Punkte des Central-Systemes 283.
Nivelliren 79.
Nonius 368.
Normal-Gleichungen bei vermittelnden Beobachtungen 110. 150.
Normal-Gleichungen bei bedingten Beobachtungen 177. 216.
Numerischer Ansatz der Bedin-

gungsgleichungen bei vermittelnden Beobachtungen 107.
Numerischer Ansatz der Bedingungsgleichungen vermittelnder Beobachtungen 180. 248. 258.

Orientirung 208. 277. 311. 325.
- des Theodolithen 368.
Orientirungs - Erneuerung 369. 372.

Paris 77.
Partielles Differentiiren 13. 175.
Patent-Boussole 362.
Polar-Coordinaten 123.
Polygonmessung mit einzelnen Winkeln 331.
Polygonmessung mit Compafsstrichen 357.
Polygonmessung mit Azimuth-Uebertragung 367.
Polygonometrie des Raumes 374.
Pothenotsche Aufgabe 28. 124. 197. 198. 303.
Princip der kleinsten Quadrate 8.
- in vollständiger Form 19.
Probe-Messungen 4.
Prüfung, äufsere 302.
- des [*vv*] 383. 385.
Prüfungs-Linien 4. 309.
Pulver-Signale 75.

Quadratischer Einfluſs der Beobachtungs-Zahlen 42.
Quadratischer Einfluſs d. Maafsstab-Correctionen 91.
Quellen-Schriften 32.

Reducirte Winkel 272. 332.
Reduction der Gewichte 65.
- der Gewichts-Einheiten 101.
Regelmäfsige Fehler 1.
Regeln 68. 79. 109. 140. 148. 150. 156. 184. 185. 216. 281.
Regensack 67.
Richtungen 168.
Richtungs-Verbesserungen 163. 188.
Rückwärts-Rechnen 333.
Rückwärts-Visiren 357. 368.

Sachkenntnifs 20.
Satz-Beobachtungen 184. 268.
Scharfe Rechnung 106.
Schwerpunkt als Gleichnifs 17.
Seitenverhältnisse 276.
Signale 74. 75. 94.
Sinus-Quotienten 286.
Sphärischer Excefs 187. 193. 204.
Spitze Winkel 287.
Stations-Punkte 157. 205.
Stellvertretung für fehlende Richtungen 305. 328.
Strahlen des Central-Systemes 282.
- Quotienten 286.
Strafsen-Baumeister 371.
Streichen nach dem Erfolg 67.
Successive Elimination 399.
Summen und Differenzen 71.

Tetragonometrische Bestimmung 279.
Tilgung von Linien bei der Aufsuchung 289.
Theil-Messungen 76.
Theodolithen - Messungen 21. 47. 51. 62.
Thurm-Gebälk 77.
Trennung der Orientirung 325.

Ueberschüssige Beobachtungen 4. 26.
Uebersicht der Haupt-Geschäfte bei vermittelnden Beobachtungen 111.
Uebersicht der Hauptgeschäfte bei bedingten Beobachtungen 178.
Uebersicht der nachträglichen Geschäfte bei vermittelnden Beobachtungen 140.
Uebersicht der Uebertragungs-Geschäfte bei bedingten Beobachtungen 228.
Uebersicht der Winkelpunkte 170.
Uebertragungs - Coefficienten 228. 239.
Uebertragungs - Gleichungen 238. 239.
Unbenannte Zahlen der Verbesserungen 19. 98.
Ungewöhnliche Fälle 285. 292.
Unregelmäfsige Fehler 2.
Unvermeidliche Fehler 2.
Unvollständige Ausgleichung 394.
Urtheil nach dem Erfolg 67.

V andere Form für *corr.* Δ. 197.
Veränderliche Gröfsen 12. 13.

Verbesserungen 7. 40.
Verdienst, welches sich Practiker erwerben können 44. 53. 79.
Verhältnifs der mittleren Fehler 19. 53.
Verhältnifs der Coefficienten in Bedingungsgleichungen 262.
Vermittelnde Beobachtungen 26. 102.
Verschwindend kleine Gröfsen 10.
Versicherungs-Basis 4. 321.
Verträgliche Beobachtungen 29. 175.
Vielfache von beobachteten Gröfsen 81.
Vier-Punkt-System 280.
Visir-Punkte 51. 125. 157.
Vollständigere Form des Princips 19.
Vorbereitende Geschäfte 111. 178.
Vorläufige Azimuthe 159.
Vorläufige Beispiele 14.
Vorläufige Elemente 104.

Wahrscheinliche Fehler 45.
Wahrscheinlichkeits-Rechnung 23. 45.
Wehrshäuser Höhe 308.
Wetten 45. 49.
Widersprüche 5.
Widersprüche bei directen Beobachtungen 26.
Widersprüche bei vermittelnden Beobachtungen 108.
Widersprüche bei bedingten Beobachtungen 172.
Willkühr bei dem Princip 24.
Willkührliche Abänderung der Gewichtszahlen 151.
Wind 52.
Winkelbeobachtungen 51.
Winkel-Zusammensetzung 73. 77.
Wollen und Sollen 125. 157. 194.

Zeichnung für *corr. Δ.* und *V* 190. 196.
Zoll-Centner 83.
Zufällige Fehler 2.
Zurückvisiren 357. 369.
Zusammensetzung der Theile 76.
Zusammensetzung der Winkel 73. 77.

Gotha,
gedruckt mit Engelhard-Reyherschen Schriften.

In unserem Verlage erschien:

Bretschneider, C. A., Professor, Productentafeln, enthaltend die 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 100,000.

Sowohl die Rechnungen der eigentlichen Mathematiker als auch die der Forstmänner, Cameralisten, practischen Geometer, Feldmesser u. s. w. erfordern eine große Menge Multiplicationen von drei-, vier- und fünfzifferigen Zahlen, bei welchen die Anwendung der Logarithmen zu umständlich und unbequem sein würde, weshalb die Rechner gezwungen sind, die nöthigen Vielfachen jener Zahlen jedesmal besonders auszurechnen, was lästig und unsicher zugleich ist. Die vorstehende Tafel hilft diesem Uebelstande gänzlich ab, indem sie das Multipliciren in ein bloßes Aufschlagen und Abschreiben einzelner Zahlenwerthe aus den Tafeln verwandelt und somit dem Resultate der Rechnung vollkommene Sicherheit verleiht.

Der Preis ist 20 Ngl.

Arzberger, M., H. S. C. G. Regierungs- und Obersteuerrath, Eisenbahnen als Staats- und als Gesellschafts-Unternehmungen. Mit einer Karte. 15 Ngl.

Hierzu erscheint in Kurzem als Fortsetzung von demselben Verfasser:

Grundzüge eines Systems der Ausführung und Verwaltung der Deutschen Eisenbahnen.

Ferner erscheint in Kurzem:

Schlimbach, S., Anleitung zum ersten Unterricht in der Himmelskunde für Volksschulen. Mit 60 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Von dem im Jahre 1809 erschienenen:

Gauss, C. F., theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. gr. 4.

sind noch Exemplare zu 6 Thlr. 20 Ngl. zu haben.

Friedrich u. Andreas Perthes.

in 6 Jahr. 20 Mal. zu haben.

Genauigkeit der Functionen bedingter Beobachtungen.

		§.	S.
n. 50.	$L_1 = l_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3$ $L_2 = l_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3$ $L_3 = l_3 + a_3 r_1 + b_3 r_2 + c_3 r_3$ $L_4 = l_4 + a_4 r_1 + b_4 r_2 + c_4 r_3$	74	226
- 51.	$0 = [al] + [aa] r_1 + [ab] r_2 + [ac] r_3$ $0 = [bl] + [ab] r_1 + [bb] r_2 + [bc] r_3$ $0 = [cl] + [ac] r_1 + [bc] r_2 + [cc] r_3$	74	228
- 52.	$m = m_1 \sqrt{[LL]}$	74	228
- 53.	$\frac{1}{P} = [LL]$	74	228
- 54.	$0 = \left[\frac{al}{p}\right] + \left[\frac{aa}{p}\right] r_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] r_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] r_3$ $0 = \left[\frac{bl}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] r_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_3$ $0 = \left[\frac{cl}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] r_3$	77	239
- 55.	$m = \sqrt{[LLmm]}$	77	240
- 56.	$\frac{1}{P} = \left[\frac{LL}{p}\right]$	77	240

Ansatz für bedingte Beobachtungen.

57.	$z_{b_2} = l - p + 1$	85	271
58.	$z_{b_3} = l - 2p + 3$	87 94	277 311
59.	$z_{b_3} = l_\varrho + l_\lambda - t - 2p + 2$	99	326
60.	$0 = [w\kappa] + [vv]$	110	385

I. Uebersicht der Haupt-Formeln.

Directe Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

			§.	S.
n. 1.	$M = \frac{[o]}{z_o}$		12	34
- 2.	$[v] = 0$		12	34
- 3.	$[vv] = z_o MM - 2[o]M + [oo]$		13	35
- 4.	$[vv] = [oo] - \frac{[o]^2}{z_o}$		13	35
- 5.	$[uu] = [vv] + z_o(W-M)^2$		14	36
- 6.	$\delta = \sqrt{\frac{[vv]}{z_o}}$		15	37
- 7.	$m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_o - 1}}$		16	39
- 8.	$m = \delta\sqrt{\frac{z_o}{z_o - 1}}$		16	40
- 9.	$z_o mm = [vv] + z_o \mu\mu$		17	42
- 10.	$\mu = \frac{m}{\sqrt{z_o}}$		17	42
- 11.	$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{z_o(z_o-1)}}$		17	42

Directe Beobachtungen verschiedener Genauigkeit.

			§.	S.
- 12.	$M = \frac{[po]}{[p]} = \frac{\left[\frac{o}{mm}\right]}{\left[\frac{1}{mm}\right]}$		23	57
- 13.	$[pv] = 0$		23	58
- 14.	$m_n = \frac{m}{\sqrt{p_n}}$		24	59
- 15.	$\mu = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{mm}\right]}}$		24	59
- 16.	$P = [p]$		24	60
- 17.	$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{z_o - 1}}$		25	62

Genauigkeit der Functionen directer Beobachtungen.

			§.	S.
n. 18.	$m = \sqrt{m_1 m_1 + m_2 m_2}$		30	71
- 19.	$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$		30	72
- 20.	$P = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}$		30	73
- 21.	$m = \sqrt{[mm]}$		32	76
- 22.	$\frac{1}{P} = \left[\frac{1}{p}\right]$		32	76
- 23.	$P = \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots}{p_2 p_3 \cdots + p_1 p_3 \cdots + p_1 p_2 \cdots + \cdots + \cdots}$		32	76
- 24.	$m = \pm a_1 m_1$		34	81
- 25.	$P = \frac{p_1}{a_1 a_1}$		34	81
- 26.	$m = \sqrt{[aa\,mm]}$		36	85
- 27.	$\frac{1}{P} = \left[\frac{aa}{p}\right]$		36	85
- 28.	$P = \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots}{a_1 a_1 p_2 p_3 \cdots + a_2 a_2 p_1 p_3 \cdots + a_3 a_3 p_1 p_2 \cdots}$		36	85
- 29.	$m = \sqrt{[ll\,mm]}$		38	92
- 30.	$\frac{1}{P} = \left[\frac{ll}{p}\right]$		38	92
- 31.	$m = m_1\sqrt{[ll]}$		38	93
- 32.	$\frac{1}{P} = \frac{[ll]}{p_1}$		38	93

Vermittelnde Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

			§.	S.
	$0 = n_1 + a_1 dE_1 + b_1 dE_2 + c_1 dE_3$			
- 33.	$0 = n_2 + a_2 dE_1 + b_2 dE_2 + c_2 dE_3$		42	108
	$0 = n_3 + a_3 dE_1 + b_3 dE_2 + c_3 dE_3$			
	$0 = [an] + [aa]dE_1 + [ab]dE_2 + [ac]dE_3$			
n. 34.	$0 = [bn] + [ab]dE_1 + [bb]dE_2 + [bc]dE_3$		42	110
	$0 = [cn] + [ac]dE_1 + [bc]dE_2 + [cc]dE_3$			
- 35.	$m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_o - z_e}}$		45	132
		$0 = -1 + [aa]Q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3$		
	I.	$0 = 0 + [ab]Q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3$		
		$0 = 0 + [ac]Q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3$		
		$0 = 0 + [aa]q_1 + [ab]Q_2 + [ac]q_3$		
- 36.	II.	$0 = -1 + [ab]q_1 + [bb]Q_2 + [bc]q_3$	47	138
		$0 = 0 + [ac]q_1 + [bc]Q_2 + [cc]q_3$		
		$0 = 0 + [aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]Q_3$		
	III.	$0 = 0 + [ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]Q_3$		
		$0 = -1 + [ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]Q_3$		
	$[\alpha\alpha] = Q_1 = \frac{1}{P_1}$			
- 37.	$[\beta\beta] = Q_2 = \frac{1}{P_2}$		47	139
	$[\gamma\gamma] = Q_3 = \frac{1}{P_3}$			
- 38.	$\varepsilon_1 = m\sqrt{Q_1};\ \varepsilon_2 = m\sqrt{Q_2};\ \varepsilon_3 = m\sqrt{Q_3}$		47	139
- 39.	$\mathfrak{m} = \sqrt{[hh\varepsilon\varepsilon]}$		50	145
- 40.	$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \left[\frac{hh}{P}\right]$		50	145

Vermittelnde Beobachtungen verschiedener Genauigkeit.

			§.	S.
	$0 = [pan] + [paa]dE_1 + [pab]dE_2 + [pac]dE_3$			
- 41.	$0 = [pbn] + [pab]dE_1 + [pbb]dE_2 + [pbc]dE_3$		52	150
	$0 = [pcn] + [pac]dE_1 + [pbc]dE_2 + [pcc]dE_3$			
- 42.	$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{z_o - z_e}}$		54	153

Bedingte Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

			§.	S.
	$0 = w_1 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 +$			
n. 43.	$0 = w_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + \ldots$		59	174
	$0 = w_3 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 +$			
	$v_1 = a_1 K_1 + b_1 K_2 + c_1 K_3 +$			
- 44.	$v_2 = a_2 K_1 + b_2 K_2 + c_2 K_3 +$		59	177
	$v_3 = a_3 K_1 + b_3 K_2 + c_3 K_3 +$			
	$v_4 = a_4 K_1 + b_4 K_2 + c_4 K_3 +$			
	$0 = w_1 + [aa]K_1 + [ab]K_2 + [ac]K_3 +$			
- 45.	$0 = w_2 + [ab]K_1 + [bb]K_2 + [bc]K_3 + \ldots$		59	177
	$0 = w_3 + [ac]K_1 + [bc]K_2 + [cc]K_3 +$			
- 46.	$m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_b}}$		61	182

Bedingte Beobachtungen verschiedener Genauigkeit.

			§.	S.
	$v_1 = \frac{a_1 K_1}{p_1} + \frac{b_1 K_2}{p_1} + \frac{c_1 K_3}{p_1} + \ldots$			
	$v_2 = \frac{a_2 K_1}{p_2} + \frac{b_2 K_2}{p_2} + \frac{c_2 K_3}{p_2} + \ldots$			
- 47.	$v_3 = \frac{a_3 K_1}{p_3} + \frac{b_3 K_2}{p_3} + \frac{c_3 K_3}{p_3} + \ldots$		70	216
	$v_4 = \frac{a_4 K_1}{p_4} + \frac{b_4 K_2}{p_4} + \frac{c_4 K_3}{p_4} + \ldots$			
	$0 = w_1 + \left[\frac{aa}{p}\right]K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]K_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]K_3 +$			
- 48.	$0 = w_2 + \left[\frac{ab}{p}\right]K_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]K_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]K_3 +$		70	216
	$0 = w_3 + \left[\frac{ac}{p}\right]K_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]K_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]K_3 +$			
- 49.	$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{z_b}}$		71	217

Genauigkeit der Functionen bedingter Beobachtungen.

			§.	S.
	$L_1 = l_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3$			
	$L_2 = l_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3$			
n. 50.	$L_3 = l_3 + a_3 r_1 + b_3 r_2 + c_3 r_3$		74	226
	$L_4 = l_4 + a_4 r_1 + b_4 r_2 + c_4 r_3$			
	$0 = [al] + [aa]r_1 + [ab]r_2 + [ac]r_3$			
- 51.	$0 = [bl] + [ab]r_1 + [bb]r_2 + [bc]r_3 \ldots$		74	228
	$0 = [cl] + [ac]r_1 + [bc]r_2 + [cc]r_3$			
- 52.	$m = m_1\sqrt{[LL]}$		74	228
- 53.	$\frac{1}{P} = [LL]$		74	228
	$0 = \left[\frac{al}{p}\right] + \left[\frac{aa}{p}\right]r_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]r_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]r_3$			
- 54.	$0 = \left[\frac{bl}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right]r_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]r_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]r_3 \ldots$		77	239
	$0 = \left[\frac{cl}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right]r_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]r_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]r_3$			
- 55.	$m = \sqrt{[LL\,mm]}$		77	240
- 56.	$\frac{1}{P} = \left[\frac{LL}{p}\right]$		77	240

Ansatz für bedingte Beobachtungen.

			§.	S.
- 57.	$z_{b_1} = l - p + 1$		85	271
- 58.	$z_{b_2} = l - 2p + 3$		87 / 94	277 / 311
- 59.	$z_{b_3} = l_0 + l_1 - t - 2p + 2$		99	326
- 60.	$0 = [w\kappa] + [vv]$		110	385

Für den Buchbinder: Die beiden Beilagen werden entweder wie die Figurentafeln zum Herausschlagen angebunden, oder besonders auf Pappe, Leinwand oder dergl. gezogen.

		§.	S.
(29)	$\mathrm{d}y_q = \sin A_m \,\mathrm{d}s_m$ $\mathrm{d}x_q = \cos A_m \,\mathrm{d}s_m$	102	338
(30)	$\mathrm{d}y_q = -(x_q - x_m)\,\frac{\mathrm{d}\alpha_m}{\varrho}$ $\mathrm{d}x_q = (y_q - y_m)\,\frac{\mathrm{d}\alpha_m}{\varrho}$	102	339
(31)	$0 = [s \sin A]$ $0 = [s \cos A]$	105	358
(32)	$0 = s_n \sin A_n + [s \sin A]$ $0 = s_n \cos A_n + [s \cos A]$	105	359
(33)	$0 = [s \sin A] \cos A_n - [s \cos A] \sin A_n$ $0 = s_n + [s \sin A] \sin A_n + [s \cos A] \cos A_n$	105	359
(34)	$0 = [s \sin (A - A_n)]$ $0 = s_n + [s \cos (A - A_n)]$	105	359
(35)	$0 = s_n - \sqrt{[s \sin A]^2 + [s \cos A]^2}$	105	361
(36)	$0 = [s \sin A \cos n]$ $0 = [s \cos A \cos n]$ $0 = [s \sin n]$	108	374

II. Uebersicht der wichtigsten Neben-Formeln und Hülfs-Gleichungen.

		§.	S.
(1)	$0 = F_1(O_1 E_1 E_2 E_3)$ $0 = F_2(O_2 E_1 E_2 E_3)$ $0 = F_3(O_3 E_1 E_2 E_3)$ $0 = F_4(O_4 E_1 E_2 E_3)$ $0 = F_5(O_5 E_1 E_2 E_3)$	41	103
(2)	$dO_1 = a_1 dE_1 + b_1 dE_2 + c_1 dE_3$ $dO_2 = a_2 dE_1 + b_2 dE_2 + c_2 dE_3$ $dO_3 = a_3 dE_1 + b_3 dE_2 + c_3 dE_3$ $dO_4 = a_4 dE_1 + b_4 dE_2 + c_4 dE_4$ $dO_5 = a_5 dE_1 + b_5 dE_2 + c_5 dE_5$	42	106
(3)	$dE_1 = c_1 dO_1 + c_2 dO_2 + c_3 dO_3 + c_4 dO_4 + c_5 dO_5$ $dE_2 = \beta_1 dO_1 + \beta_2 dO_2 + \beta_3 dO_3 + \beta_4 dO_4 + \beta_5 dO_5$ $dE_3 = \gamma_1 dO_1 + \gamma_2 dO_2 + \gamma_3 dO_3 + \gamma_4 dO_4 + \gamma_5 dO_5$	47	134
(4)	$[\alpha a] = 1;\ [\alpha b] = 0;\ [\alpha c] = 0$ $[\beta a] = 0;\ [\beta b] = 1;\ [\beta c] = 0$ $[\gamma a] = 0;\ [\gamma b] = 0;\ [\gamma c] = 1$	47	135
(5)	$0 = -[adO] + [aa] dE_1 + [ab] dE_2 + [ac] dE_3$ $0 = -[bdO] + [ab] dE_1 + [bb] dE_2 + [bc] dE_3$ $0 = -[cdO] + [ac] dE_1 + [bc] dE_2 + [cc] dE_3$	47	136
(6)	$0 = -[adO]q_1 + [aa]q_1 dE_1 + [ab]q_1 dE_2 + [ac]q_1 dE_3$ $-[bdO]q_2 + [ab]q_2 dE_1 + [bb]q_2 dE_2 + [bc]q_2 dE_3$ $-[cdO]q_3 + [ac]q_3 dE_1 + [bc]q_3 dE_2 + [cc]q_3 dE_3$	47	136
(7)	$dE_1 = (a_1Q_1 + b_1q_2 + c_1q_3)\,dO_1$ $+ (a_2Q_1 + b_2q_2 + c_2q_3)\,dO_2$ $+ (a_3Q_1 + b_3q_2 + c_3q_3)\,dO_3$ $+ (a_4Q_1 + b_4q_2 + c_4q_3)\,dO_4$ $+ (a_5Q_1 + b_5q_2 + c_5q_3)\,dO_5$	47	138
(8)	$\alpha_1 = a_1Q_1 + b_1q_2 + c_1q_3$ $\alpha_2 = a_2Q_1 + b_2q_2 + c_2q_3$ $\alpha_3 = a_3Q_1 + b_3q_2 + c_3q_3$ $\alpha_4 = a_4Q_1 + b_4q_2 + c_4q_3$ $\alpha_5 = a_5Q_1 + b_5q_2 + c_5q_3$	47	138
(9)	$0 = F_1(O_1; O_2; O_3; O_4\ldots) = \varphi_1$ $0 = F_2(O_1; O_2; O_3; O_4\ldots) = \varphi_2$ $0 = F_3(O_1; O_2; O_3; O_4\ldots) = \varphi_3$	58	171
(10)	$w_1 = F_1(o_1; o_2; o_3; o_4\ldots)$ $w_2 = F_2(o_1; o_2; o_3; o_4\ldots)$ $w_3 = F_3(o_1; o_2; o_3; o_4\ldots)$	58	172
(11)	$d\varphi_1 = a_1 dO_1 + a_2 dO_2 + a_3 dO_3 + a_4 dO_4$ $d\varphi_2 = b_1 dO_1 + b_2 dO_2 + b_3 dO_3 + b_4 dO_4$ $d\varphi_3 = c_1 dO_1 + c_2 dO_2 + c_3 dO_3 + c_4 dO_4$	58	173
(12)	$[vv] = v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 + v_4v_4 + \ldots$	59	175
(13)	$0 = a_1dv_1 + a_2dv_2 + a_3dv_3 + a_4dv_4$ $0 = b_1dv_1 + b_2dv_2 + b_3dv_3 + b_4dv_4$ $0 = c_1dv_1 + c_2dv_2 + c_3dv_3 + c_4dv_4$	59	176
(14)	$0 = v_1dv_1 + v_2dv_2 + v_3dv_3 + v_4dv_4$	59 74	176 227
(15)	$0 = p_1v_1dv_1 + p_2v_2dv_2 + p_3v_3dv_3 + \ldots$	70	215
(16)	$u = \psi(O_1; O_2; O_3\ldots)$	74	224
(17)	$du = l_1dO_1 + l_2dO_2 + l_3dO_3 + \ldots$	74	224
(18)	$0 = a_1dO_1 + a_2dO_2 + a_3dO_3 + a_4dO_4 + \ldots$ $0 = b_1dO_1 + b_2dO_2 + b_3dO_3 + b_4dO_4 + \ldots$ $0 = c_1dO_1 + c_2dO_2 + c_3dO_3 + c_4dO_4 + \ldots$	74	225
(19)	$u = f(O_1; O_2; O_3; O_4\ldots)$	74	225
(20)	$u = \psi(O_1; O_2; O_3\ldots) + r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 + r_3\varphi_3\ldots$	74	226
(21)	$du = L_1dO_1 + L_2dO_2 + L_3dO_3 + L_4dO_4 + \ldots$	74	226
(22)	$0 = L_1dv_1 + L_2dv_2 + L_3dv_3 + L_4dv_4 + \ldots$	74	227
(23)	$0 = [aL]$ $0 = [bL]$ $0 = [cL]$	74	228
(24)	$0 = \left[\begin{smallmatrix} aL \\ p \end{smallmatrix}\right]$ $0 = \left[\begin{smallmatrix} bL \\ p \end{smallmatrix}\right]$ $0 = \left[\begin{smallmatrix} cL \\ p \end{smallmatrix}\right]$	77	239
(25)	$ds_n = -\cos(A_m - A_n)\,ds_m$ $= -\cos(A_n - A_m)\,ds_m$ $= -\frac{({}^m x_{n+1} - {}^m x_n)}{s_n} ds_m$ $= -\frac{({}^n x_{m+1} - {}^n x_m)}{s_m} ds_m$	102	334
(26)	$dr_n = -dr_{n+1} = -\frac{\varrho \sin(A_n - A_m)\,ds_m}{s_n}$ $= -d\alpha_n = -d\alpha_{n+1} = -\frac{\varrho \sin(A_m - A_n)\,ds_m}{s_n}$ $= \frac{\varrho({}^m y_{n+1} - {}^m y_n)\,ds_m}{s_n^2}$ $= -\frac{\varrho({}^n y_{m+1} - {}^n y_m)\,ds_m}{s_m s_n}$	102	335
(27)	$ds_n = \frac{{}^n y_m\, d\alpha_m}{\varrho}$	102	336
(28)	$dr_{n+1} = -d\alpha_{n+1} = -\frac{{}^n x_m\, d\alpha_m}{s_n}$ $dr_n = -d\alpha_n = \frac{(s_n - {}^n x_m)\, d\alpha_m}{s_n}$	102	337
(29)	$dy_q = \sin A_m\, ds_m$ $dx_q = \cos A_m\, ds_m$	102	338
(30)	$dy_q = -(x_q - x_m)\frac{d\alpha_m}{\varrho}$ $dx_q = (y_q - y_m)\frac{d\alpha_m}{\varrho}$	102	339
(31)	$0 = [s \sin A]$ $0 = [s \cos A]$	105	358
(32)	$0 = s_n \sin A_n + [s \sin A]$ $0 = s_n \cos A_n + [s \cos A]$	105	359
(33)	$0 = [s \sin A]\cos A_n - [s \cos A]\sin A_n$ $0 = s_n + [s \sin A]\sin A_n + [s \cos A]\cos A_n$	105	359
(34)	$0 = [s \sin(A - A_n)]$ $0 = s_n + [s \cos(A - A_n)]$	105	359
(35)	$0 = s_n - \sqrt{[s \sin A]^2 + [s \cos A]^2}$	105	361
(36)	$0 = [s \sin A \cos n]$ $0 = [s \cos A \cos n]$ $0 = [s \sin n]$	108	374

Fig. 1.
§ 63.

Fig. 3.
§ 64.

Fig. 2
§ 63.

Fig. 4.
§ 64.

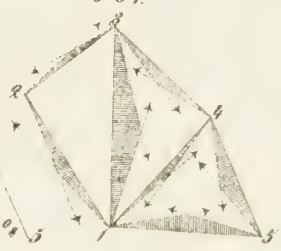


Fig. 5.
§ 63.

Stauffenberg

Meisner.

Fig. 6.
§ 63.

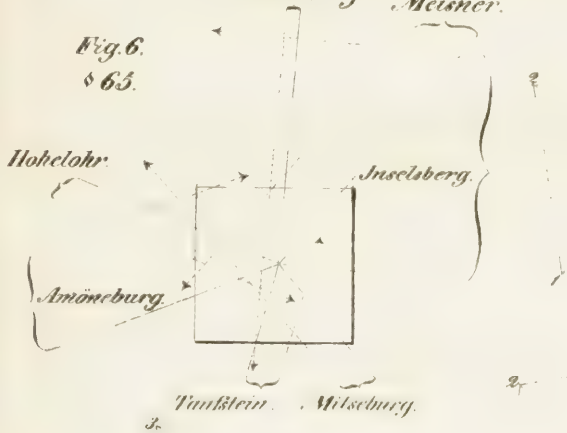


Fig. 7.
§ 66.

Fig. 8.
§ 66.

Fig. 9.
§ 68 & 78.

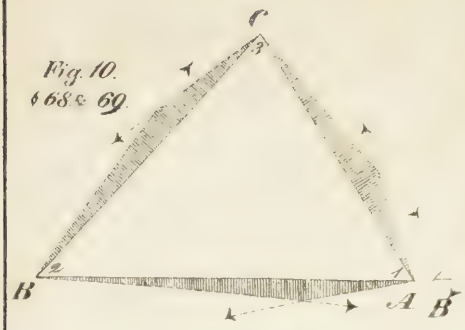


Fig. 10.
§ 68 & 69.

Fig. 11.
§ 80

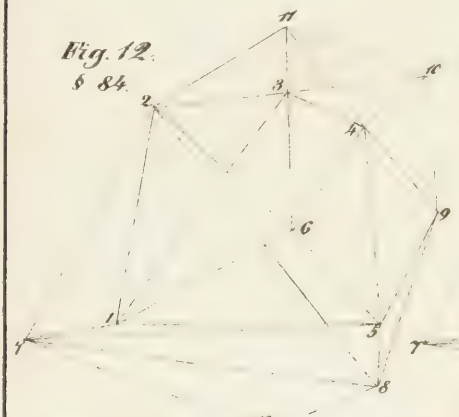


Fig. 12.
§ 84.

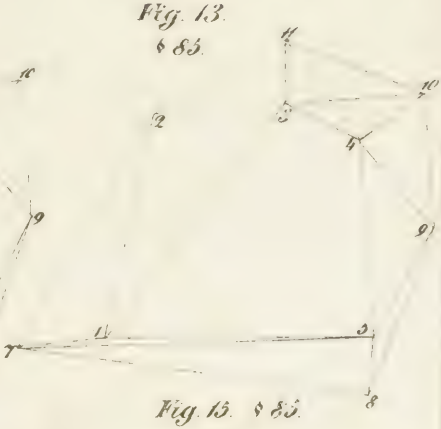


Fig. 13.
§ 85.

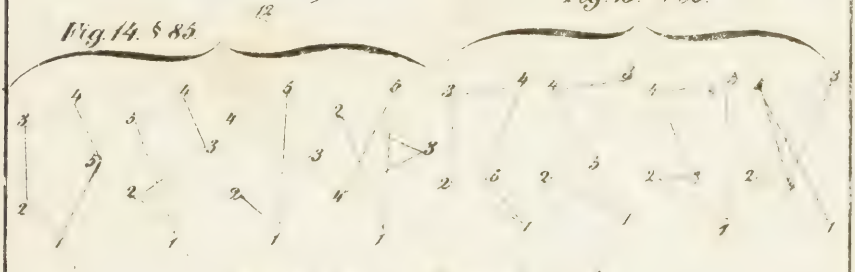


Fig. 14. § 85.

Fig. 15. § 85.

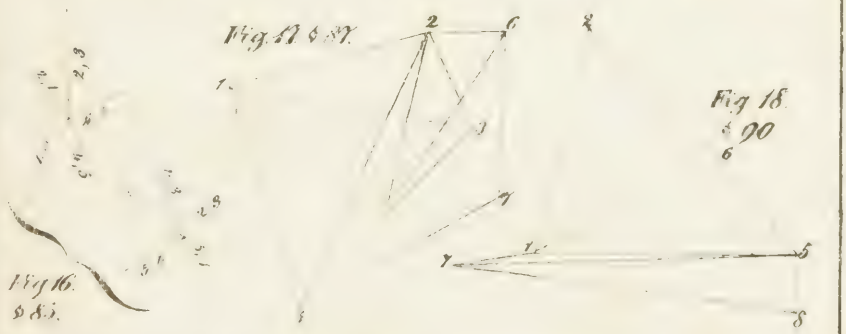


Fig. 16.
§ 85.

Fig. 17. § 87.

Fig. 18.
§ 90

Fig. 19.
§ 90.

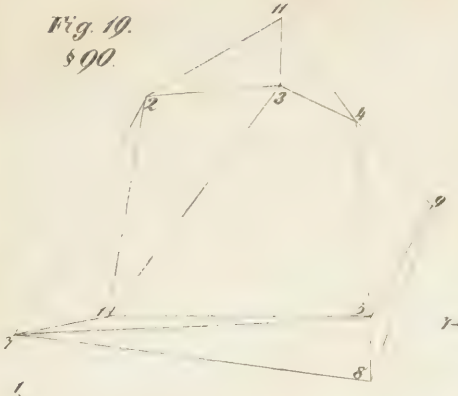


Fig. 20.
§ 91.

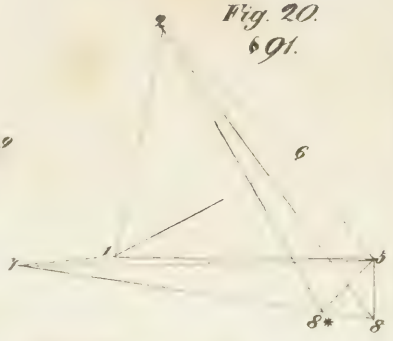


Fig. 21.
§ 92.

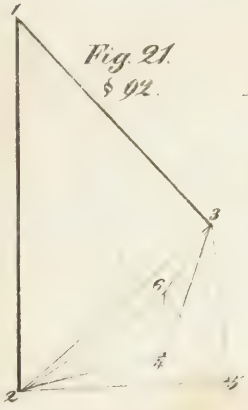


Fig. 22.
§ 96.

Fig. 24.
§ 97

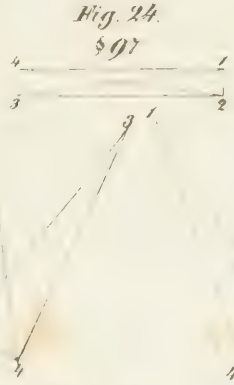


Fig. 23.
§ 96.

Fig. 25. § 97.

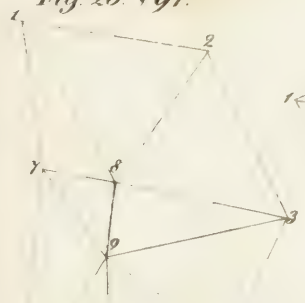
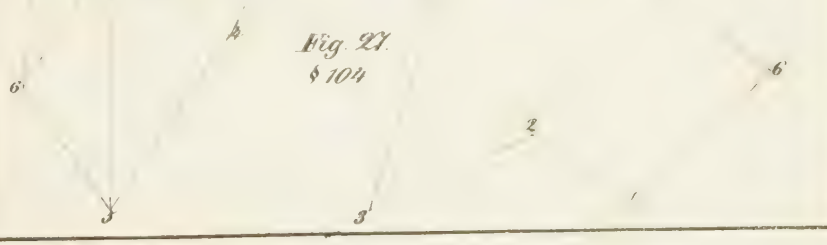


Fig. 26. § 97.

Fig. 27.
§ 104



UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
519.53G31A C001
DIE AUSGLEICHUNGS-RECHNUNGEN DER PRACTIS
3 0112 017349231